GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 1 1 OCTOMBRIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9803

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 1 — 1 OCTOMBRIE 1943

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 784. Fie* BB', CC' *înălţimi în triunghiul* ABC *cu ortocentrul în* H. *Se notează cu* A_1 *şi* A_2 *intersecţiile bisectoarelor unghiurilor* BC'C, CB'B *şi* AC'C, AB'B. *Se notează cu* A_3 *şi* A_4 *intersecţiile bisectoarelor unghiurilor* BC'C, AB'B *şi* BB'C, AC'C.

Să se arate că figurile BA_1CA_2 *şi* AA_3HA_4 *sunt patrate.*

GH. B.

Patrulaterul $A_1B'A_2C'$ este inscriptibil în cercul de diametru A_1A_2 pentrucă are unghiurile din B' şi C' drepte.

Deoarece

$$\sphericalangle A_1B'C = \sphericalangle A_1C'C = 45^0$$

urmează că şi $A_1CB'C'$ este inscriptibil în acelaşi cerc de diametru A_1A_2 şi deci

$$\sphericalangle A_1A_2C = \sphericalangle A_1B'C = 45^0$$

şi cum unghiul A_1CA_2 este drept rezultă că

$$\sphericalangle A_2A_1C = 45^0.$$

La fel se arată că triunghiul A_1BA_2 este dreptunghic isoscel ca şi A_1CA_2, de unde rezultă că BA_1CA_2 este patrat.

De asemeni se observă că patrulaterul AC'HB' este înscris în cercul de diametru AH care trece şi prin punctele A_3, A_4 pentrucă

$$\sphericalangle A_3C'A = \sphericalangle A_3B'A = \sphericalangle A_4C'A = \sphericalangle A_4B'A = 45^0.$$

Restul ca la prima parte.

Exerciţii Generale. *E. G. 519. Dacă d_i reprezintă divizorii lui 100, să se calculeze sumele:*

$$\Sigma\, d_i \varphi(d_i) \quad \text{şi} \quad \Sigma\, \frac{\varphi(d_i)}{d_i}.$$

I. L.

Fie $N = a^\alpha$ şi d_i divizorii lui, atunci avem:

$$\begin{aligned}\Sigma\, d_i \varphi(d_i) &= 1 + a \cdot \varphi(a) + a^2 \cdot \varphi(a^2) + \ldots + a^\alpha \cdot \varphi(a^\alpha) \\ &= 1 + a(a-1) + a^3 \cdot (a-1) + \ldots + a^{2\alpha-1} \cdot (a-1) \\ &= 1 + a \cdot (a-1) \cdot [1 + a^2 + \ldots + a^{2(\alpha-1)}] \\ &= 1 + a(a-1)\frac{a^{2\alpha}-1}{a^2-1} \\ &= 1 + a \cdot \frac{a^{2\alpha}-1}{a+1}\end{aligned}$$

Fie $N = a^\alpha \cdot b^\beta$, atunci avem:

$$\begin{aligned}\Sigma\, d' \varphi(d') &= \Sigma\, d_i \cdot \varphi(d_i) + \Sigma\, b \cdot d_i \cdot \varphi(b \cdot d_i) + \ldots \\ &\quad \ldots + \Sigma\, b^\beta \cdot d_i \cdot \varphi(b^\beta \cdot d_i) \\ &= \Sigma\, d_i \cdot \varphi(d_i)\,[1 + \Sigma\, b \cdot \varphi(b) + \ldots + \Sigma\, b^\beta \cdot \varphi(b^\beta)] \\ &= \left[1 + a \cdot \frac{a^{2\alpha}-1}{a+1}\right] \cdot \left[1 + b \cdot \frac{b^{2\beta}-1}{b+1}\right]\end{aligned}$$

In cazul exerciţiului *519* avem:

$$N = 100 = 2^2 \cdot 5^2,$$

prin urmare:

$$\Sigma\, d_i \varphi(d_i) = \left[1 + 2 \cdot \frac{2^4-1}{2+1}\right] \cdot \left[1 + 5 \cdot \frac{5^4-1}{5+1}\right] = 11 \cdot 521 = 5731.$$

De asemenea, dacă $N = a^\alpha$, avem:

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{\varphi(d_i)}{d_i} &= 1 + \frac{\varphi(a)}{a} + \ldots + \frac{\varphi(a^\alpha)}{a^\alpha} = 1 + \frac{a-1}{a} + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{a-1}{a} = 1 + \alpha \cdot \frac{a-1}{a}\end{aligned}$$

Apoi pentru $N = a^{\alpha} b^{\beta}$

$$\sum \frac{\varphi(d')}{d'} = \sum \frac{\varphi(d_i)}{d'} + \sum \frac{\varphi(b \,.\, d_i)}{b \,.\, d_i} + \ldots + \frac{\varphi(b^{\beta} \,.\, d_i)}{b^{\beta} \,.\, d_i}$$

$$= \sum \frac{\varphi(d_i)}{d_i} \left[1 + \sum \frac{\varphi(b)}{b} + \ldots + \frac{\varphi(b^{\beta})}{b^{\beta}} \right]$$

$$= \left[1 + \alpha \,.\, \frac{a-1}{a} \right] \cdot \left[1 + \beta \,.\, \frac{b-1}{b} \right] .$$

In cazul exercițiului 519 avem $N = 100 = 2^2 \,.\, 5^2$, prin urmare:

$$\sum \frac{\varphi(d_i)}{d_i} = \left[1 + 2 \,.\, \frac{2-1}{2} \right] \cdot \left[1 + 2 \,.\, \frac{5-1}{5} \right] = 2 \,.\, \frac{13}{5} = \frac{26}{5}$$

E. G. 520. Să se calculeze valoarea diferenței:

$$\varphi\left[\sum_{1}^{10} i \right] - \sum_{1}^{10} \varphi(i)$$

de $\varphi(i)$ reprezintă indicatorul lui i.

I. L.

Avem:

$$\sum_{1}^{10} i = \frac{10 \,.\, 11}{2} = 55 \quad ; \quad \varphi(55) = 40$$

$$\sum_{1}^{10} \varphi(i) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(10) =$$

$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 4 + 6 + 4 = 32$$

Valoarea diferenței va fi dar 8.

E. G. 521. Dacă A *și* B *au aceiași factori primi, avem:*

$$\varphi(A^a \,.\, B^b) = B^b \, \varphi(A^a) = A^a \,.\, \varphi(B^b).$$

I. L.

Fie $A^a = M$ și $B^b = N$, atunci M și N având aceiași factori primi, *a, b, c,...* atunci:

$$\varphi(M) = M \,.\, \frac{\pi(a-1)}{\pi a} \quad \text{și} \quad \varphi(N) = N \,.\, \frac{\pi(a-1)}{\pi a}$$

De asemenea:

$$\varphi(M \cdot N) = M \cdot N \cdot \frac{\pi(a-1)}{\pi \cdot a} = \varphi(M) \cdot \varphi(N) \cdot \frac{\pi a}{\pi(a-1)}$$

Prin urmare:

$$\varphi(M \cdot N) = M \cdot \varphi(N) = N \cdot \varphi(M).$$

E. G. 522. Să se exprime valoarea indicatorului $\varphi(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 10)$ *în funcție de*: $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \ldots \varphi(10)$.

I. L.

Observăm că:

$$\varphi(10!) = \varphi(2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7) = 2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5$$

$$\varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3) \ldots \varphi(10) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 2^2 (2 \cdot 3) \cdot 2^2 = 2^{11} \cdot 3^2.$$

Deci:

$$\varphi(10!) = \varphi(1) \cdot \varphi(2) \ldots \varphi(10) \cdot 3^2 \cdot 5.$$

E. G. 523. Să se calculeze indicatorul lui 100 față de numerele 30 la 70.

I. L.

Avem:

$$I_{30 \to 70}(100) = I_{70}(100) - I_{30}(100) = [70 - (35 + 14) + 7] - [30 - (15 + 6) + 3] = 28 - 12 = 16$$

E. G. 524. Să se arate, prin considerațiuni de indicatori, că:

$$1^5 + 3^5 + 7^5 + 9^5 \stackrel{!}{=} M\,10.$$

I. L.

Numerele prime cu 10 și inferioare lui sunt: 1, 3, 7, 9, prin urmare avem:

$$1 + 9 = 10 \quad \text{și} \quad 3 + 7 = 10$$

Ridicând la puterea a 5-a relaţiile:

$$1 = 10 - 9 \quad \text{şi} \quad 3 = 10 - 7$$

obţinem:

$$1^5 = M\,10 - 9^5 \quad \text{şi} \quad 3^5 = M\,10 - 7^5$$

Adunând şi trecând în membrul I, găsim relaţia dată.

E. G. 525. Să se calculeze produsul numerelor prime cu 30 şi subordonate lui 77, din şirul numerelor până la 100.

I. L.

Avem:

$$P_{100}(30,77) =$$

$$= \frac{100!\,16!\,10!\,7!\,4!\,6!\,4!\,3!\,2!\,(2.3)^{16}.(2.5)^{10}.(2.7)^{7}.(2.11)^{4}.(3.5)^{6}.(3.7)^{4}.(3.11)^{3}.(5.7)^{2}.(5.11).(7.11)}{50!\,33!\,20!\,14!\,9!\,3!\,2!\,2^{50}.3^{33}.5^{20}.7^{14}.11^{9}.(2.3.5)^{3}.(2.3.7)^{2}.(2.311).(2.5.7)}$$

$$= 1.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.59.61.67.67.71.73.79.83.89.97.$$

Direct acest produs se vede că este compus din toate numerele prime mai mari ca 11.

Numere compuse nu poate cuprinde deoarece orice alt număr compus este superior lui 100.

E. G. 528. Dacă între întregii m *şi* n *avem relaţia*

$$m^2 - n^2 = 2mn + 1$$

atunci numerele m *şi* n *sunt prime între ele.*

GH. B.

Presupunem că m şi n au un divizor comun d. Atunci

$$m = m'd \quad \text{şi} \quad n = n'd,$$

iar relaţia de condiţie devine

$$m'^2d^2 - n'^2d^2 = 2m'n'd^2 + 1$$

care arată că d^2 divide pe 1 deci $d = 1$ şi prin urmare m şi n sunt prime între ele.

E. G. 529. Să se găsească trei numere de câte trei cifre, scrise cu aceleaşi cifre, aşa încât suma celor trei numere să fie 365.

GH. B.

Fie *a*, *b*, *c* cele 3 cifre cu care se pot forma, luându-le în toate felurile posibile, următoarele 6 numere

(1) *abc, acb, bac, bca, cab, cba*

Problema revine a găsi aceste numere astfel ca suma a 3 din ele să fie 365. Ar trebui făcute 20 ecuaţii care să aibă pe 365 în membrul II şi în membrul I suma a 3 din numerele şirului (1). Observăm însă că dacă considerăm cifra *a* ea poate fi întâlnită în următoarele feluri în cele 20 ecuaţii:

De 2 ori la sute şi odată la zeci, deci afectată de coeficientul 210.

De 2 ori la sute şi odată la unităţi deci afectată de coeficientul 201.

De 3 ori la sute deci afectată de coeficientul 300, etc., etc. In toate cazurile *a* are coeficient un *multiplu de 3.* La fel cu *b* şi *c.* Deci suma din membrul I se divide cu 3 pe când 365 nu. Problema nu are soluţie.

E. G. 530. Ştiind că m *este un număr prim, se cere a se găsi forma numerelor întregi* x, y, z *pentru a avea:*

$$x + y^2 + z^3 = 3m.$$

GH. B.

Faţă de divizorul 3 putem avea

$x = 3p$ sau $x = 3p \pm 1$

$y = 3q$ sau $y = 3q \pm 1$ şi deci $y^2 = 3q'$ sau $y^2 = 3q' + 1$

$z = 3r$ sau $z = 3r \pm 1$ şi deci $z^3 = 3r'$ sau $z^3 = 3r' \pm 1.$

Va trebui să asociem numerele x, y^2, z^3, în toate felurile, aşa ca suma lor să fie multiplu de 3. Se vede uşor că vom avea următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{array}{lll}
x = 3p & ; \; y = 3q & ; \; z = 3r \\
x = 3p & ; \; y = 3q \pm 1 & ; \; z = 3r - 1 \\
x = 3p + 1 & ; \; y = 3q & ; \; z = 3r - 1 \\
x = 3p + 1 & ; \; y = 3q \pm 1 & ; \; z = 3r + 1 \\
x = 3p - 1 & ; \; y = 3q & ; \; z = 3r + 1 \\
x = 3p - 1 & ; \; y = 3q \pm 1 & ; \; z = 3r.
\end{array}$$

După simplificarea cu 3, se caută valorile particulare ale lui *p, q, r* aşa ca suma ce rezultă să fie egală cu numărul prim dat *m.*

Până la 1 Septembrie 1943 s'au primit soluții bune dela:

Liceul de fete „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa V-a: Ardelean I. Mioara (V: 788, 9).
Clasa VIII-a: Păunescu G. Liliana (VIII: 604, 25).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa VII-a: Fleșeriu I. Virgil (VII: 698).

Liceul de fete, Bacău.

Clasa III-a: Teodorescu Marioara (III: 225, 35).

Liceul „Regele Ferdinand I", Bacău.

Clasa VII-a: Fănaru N. Dumitru (VII: 645, 6, 705, 7).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu Sp. Mihai (VI: 798, 83, 8, 9, 90, 1, 2, 3; E. G.: 537, 9, 40, 1).

Liceul de fete, Beiuș.

Clasa IV-a: Oala A. Ana (IV: 661, 8, 9).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa V-a: Costea D. Florian (V: 782, 6; VI: 779).
Clasa VI-a: Ardelean V. Aurel (VI: 789, 91, 2, 3); Hodișan Gh. Florian (VI: 778, 89, 90, 1, 2, 3); Maliță A. Mircea (VI: 788, 9, 90, 1, 2, 3; VII: 697); Sasu I. Ion (VI: 777, 8, 9; VII: 697; E. G.: 520, 1).
Clasa VII-a: Drimba Iosif (VII: 694, 7, 703, 5, 6).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VI-a: Avram Gh. Cristache (VI: 778, 90, 1); Constantinescu N. Ilie (VI: 788, 9, 90, 1, 2, 3, 4, 5; VII: 705; E. G.: 538, 48, 50, 3); Fancioti Silvio (VI: 779).
Clasa VII-a: Brăescu I. Leonida (VII: 694, 705, 7); Cazacu V. Vlad (E. G.: 549, 50); Gafițeanu M. Alexandru (VII: 698; 703, 5, 6, 7); Marin T. Mircea (VII: 692, 5, 703, 5, 7).
Clasa VIII-a: Țigănoiu I. Alexandru (VIII: 613, 4, 25, 30; E. G.: 537, 8, 49).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă", Brașov

Clasa IV-a: Grancea Virgil (IV: 661, 2).
Clasa VII-a: Nistor V. Horia (VII: 704).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa III-a: Trandafirescu Margareta (III: 228).
Clasa V-a: Halunga O. Cruciţa (V: 788, 9).

Liceul de fete „Carmen-Sylva", Bucureşti.

Clasa IV-a: Maxim N. Magdalena (IV: 659, 68, 9),
Clasa VII-a: Maxim Viorica (VII: 698, 703, 5, 6, 7); Stoicescu Viorica (VII: 680, 703, 5, 6).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", Bucureşti.

Clasa III-a: Barbu Ana (III: 227, 35).
Clasa V-a: Dobrescu Magdalena (V: 781, 2, 8, 9, 90, 1).

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa VI-a: Popescu Gr. Violeta (VI: 777, 8).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa IV-a: Dumitrescu F. Sorin (IV: 659, 61; V: 777, 8, 9; VI: 777, 85, 8, 9, 90, 1).
Clasa V-a: Săvescu A. Mircea (V: 788).
Clasa VI-a: Piţigoi G. Victor (VI: 777; E. G.: 540, 1); Pop V. Mircea (VI: 790, 1, 2, 3, E. G.): Soare V. Mircea (VI: 780, 90, 1, 2, 3); Spoială Tudor (VI: 790, 1, 2, 3).
Clasa VII-a: Mişicu M. (VII: 681); Ştefănescu A. Octavian (VII: 706, 7).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Ieşan Alexandru (VI: 786, 8, 90, 1, 2, 3); Muntz M. Eduard (VI: 788, 9, 90, 1, 2, 3, 4; VII: 692, 3, 705, 7, 11; VIII: 610, 9, 3, 7, 25, 30, 2; E. G.: 534, 8, 9, 40, 1, 3, 4, 8, 9, 50).
Clasa VII-a: Antonescu D. Eugen (VII: 689, 703, 4, 5, 6, 7, 9, 10; VIII; 608, 12, 25); Popescu Ştefan (VII: 689, 703).

Liceul „Mihail Eminescu", Bucureşti.

Clasa VII-a: Timotei Alexandru (E. G.: 540, 1).
Clasa VIII-a: Aron I. Gheorghe (VIII: 612, 3, 4, 6, 7, 20, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 30, 1; E. G.: 540, 1).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa VII-a: Luca S. Lazăr (VII: 705, 7, 9); Prassa Gh. Constantin (VII: 690, 1, 4, 5, 8, 702, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10).
Clasa VIII-a: Teodorescu T. Aristide (VIII: 604, 5, 6, 13, 4).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VI-a: Costescu L. Lucian (VI: 788, 90, 1, 2, 3).

Clasa VII-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 690, 1, 5, 6, 7, 8, 702, 3, 5, 6, 7, 8; VIII: 628, 33; E. G.: 537, 8).

Clasa VIII-a: Negru Radu (VIII: 617, 22, 30).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa IV-a: Seni Dinu (IV: 667, 8, 9, 790; E. G.: 549),

Clasa V-a: Timiş A. Dumitru (V: 774).

Clasa VI-a: Cantuniar Cristu (VII: 680, 98); Mustăcescu V. Traian (VI: 777, 8, 9, 81, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Daniilescu C. Constantin (VI: 777, 8, 9, 80, 94).

Clasa VII-a: Ene Al. Ioan (VII: 705, 6, 7).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa V-a: Leon Al. Mihai (V: 774, 5, 6, 7, 8, 80, 1, 2, 3, 7, 8, 89, 90, 1, 2; VI: 779, 80; E. G.: 513, 23, 37, 8).

Clasa VI-a: Lăzărescu Ion (VI: 777, 80, 91, 2; VII: 705); Marinescu E. Emil (VI: 780, 1).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa VI-a: Cociuman D. Anton (VII: 791).

Liceul „Sf. Andrei", Bucureşti.

Clasa IV-a: Dobrescu C. Paul (IV: 662, 4, 7, 8, 9, 70).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa III-a: Ionescu A. Virgil (III; 225, 9, 30, 1); Raymondo V. Colino (III: 225).

Clasa VI-a: Leţia L. Valentin (VI: 776, 7, 8, 9, 80, 1, 94; E. G.: 527).

Liceul „Profesorii Asociaţi" Bucureşti.

Clasa VII-a: Maistros N. Ianachi (VII: 705, 7).

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa VII-a: Popescu I. Chiril (VII: 692, 3, 4, 5, 7, 8, 702, 3).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa V-a: Constantinescu D. Petre (V: 788, 9; VI: 788).

Liceul „Iulia Hasdău", Câmpina.

Clasa VI-a: Safta Viorica (VI: 779, 80).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VI-a: Barbu A. Ioan (VI: 778, 86, 90, 1, 2, 3, 4, 5; E. G.: 537, 49, 50); Gheorghe A. Grigore (VI: 776, 7, 86, 90, 1, 2, 3, 4, 5; E. G.: 537, 8, 49, 50).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa VII-a: Gherghic H. Gheorghe (VII: 688, 96, 703, 6, 7, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa III-a: Georgescu C. Gabriela (III: 225, 6, 7, 8, 9, 30, 1, 3).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa IV-a: Nicolae M. George (IV: 648, 59, 67, 8, 9; V: 766, 8, 76, 7, 8, 80, 8, 92, 3, 4; VI: 777, 91; VIII: 610; E. G.: 499, 538, 50).

Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu.

Clasa VIII-a: Palada I. Grigore (VIII, 591).

Liceul „Oltea Doamna", Iași.

Clasa V-a: Albu D. Aurelia (V: 777).

Liceul Militar, Iași.

Clasa III-a: Enăchescu V. Tudor (III: 223); Fogel D. Gh. (III: 224); Gheorghiu V. Petru (III: 223); Huides H. Al. (III: 234, 5; V: 790; E. G.: 550); Mardare Mihai (III: 224); Pavel N. Clement (III: 224); Pietrăreanu I. Aurel (III: 224); Platon C. Florin (III: 224; E. G.: 550); Tofan Aurel (III: 234, 5; IV: 667, 8, 9; E. G.: 550); Toma Gh. Octavian (III: 224).

Clasa IV-a: Bârsănescu M. Virgil (IV: 661); Calcan V. Victor (IV: 656, 8); Diaconu Gheorghe (IV: 652); Iacobeț Gh. Nicolae (IV: 661); Olaru Gh. Adrian (IV: 658); Vlad Mircea (IV: 658, 60, 1, 2).

Clasa V-a: Bârzescu Mircea (VI: 788, 90, 2, 3, 4; E. G.: 538, 49, 50); Nache D. (E. G.: 523).

Clasa VI-a: Roșu Tr. Nicolae (VI: 788, 9, 90, 1, 2, 3; E. G.: 513); Turiceanu D. Constantin (VI: 789, 91, 3); Vintilă Gh. Constantin (VI: 789, 91, 2, 3).

Clasa VII-a: Andrei G. Aurel (VII: 677, 705, 7); Andronache I. (VII: 697; E. G.: 550); Andreescu M. (VII: 771); Ardeleanu Gh. (VII: 771); Bosinceanu C. (VII: 705, 6, 7); Popa D. Petru (VII: 705, 6, 7; Rădulescu Th. Mircea (VII: 680; E. G.: 521, 2); Turculeț Tiberiu (VII: 680); Văideanu M. George (VII: 705, 7); Vasiliu G. Dumitru (VII: 677, 80, 703, 4, 5, 6, 7; VIII: 620, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 30, 3, 5; E. G.: 519, 20, 1, 2, 3, 34, 8).

Liceul de fete, Piatra-Neamţ.

Clasa VII-a: Secărescu E. Maria (VII: 698).

Liceul „Petru Rareş", Piatra-Neamţ.

Clasa VI-a: Măzărescu S. Mircea (VI: 777, 91).

Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.

Clasa V-a: Ionescu I. Mihail (V: 776, 88).
Clasa VII-a: Florescu Liviu (VII: 689).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploieşti.

Clasa VII-a: Georgescu A. Maria (VII: 689, 98, 703, 5, 6, 7).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa V-a: Constantinescu R. Mihai (V: 774, 5, 7, 80, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 92, 4; VI: 777, 9, 80, 1, 3, 4, 8, 9, 90, 1, 2, 3, 4; VII: 684, 90, 1, 4, 7, 8, 70, 2, 4; VIII: 612, 3, 25, 7, 8, 30, 1; E. G.: 534, 9, 40, 1, 50).
Clasa VI-a: Busuioc I. Florin (VI: 791, 2); Teodosiu G. Traian (VI: 790, 1).
Clasa VII-a: Vintilescu A. George (VII: 680, 704, 5, 6, 7).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VI-a: Columbeanu D. Petre (VI: 780, 1, 8, 9, 90, VII: 705; E. G.: 510, 2, 3, 5, 6, 20, 37, 44, 50); Ghiţă M. Vasile (VI: 790, 2); Marinescu C. Marinel (VI: 771, 8, 90, 2).
Clasa VII-a: Iliescu C. C. (E. G.: 515, 34, 5, 6); Jurist Gh. Vlad (VII: 690, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 700, 1, 2, 4, 5, 6, 7; VIII: 610, 2, 9, 25; E. G.: 537, 9, 40, 1),

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuţi.

Clasa VI-a: Ududec I. Modest (VI: 790, 1).

Gimnaziul „Principele Carol" Sânnicolaul-Mare.

Clasa IV-a: Alexa G. Adrian (IV: 667, 8).

Liceul „Gh. Lazăr", Sibiu.

Clasa VI-a: Coman Alexandru (VI: 779, 91).

Liceul „Enăchiţă Văcărescu", Târgovişte.

Clasa V-a: Iacob M. Ştefan (V: 782).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VII-a: GÂȚĂ GH. GHEORGHE (VII: 690, 1, 5, 7, 8, 703, 4; VIII: 610, 2); GIURCONOIU GH. MIHAI (VII: 689).

Gimnaziul „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa III-a: DERVIȘ M. DUMITRU (III: 225, 6); OLTEANU G. EMIL (III: 225, 6).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timișoara.

Clasa VI-a: ȚINCU C. CONSTANTIN (VI: 788, 9, 90, 2, 3, 4; VIII: 613, 27; E. G.: 512, 34, 7, 8, 49, 50).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa IV-a: STANCIU PETRE (IV: 661, 2); TRIPȘA IOSIF (IV: 657, 8, 9, 61; V: 777, 8; E. G.: 525).

Clasa V-a: FILIMON IONEL (V: 778, 9; VI: 788, 92); IORDĂNESCU VIRGIL (V: 782, 9); ROGOZ V. IOAN (V: 788, 9); STREJEA N. IORGU (V: 776, 81, 8); TEODORESCU AL. ALEXANDRU (V: 776, 7, 8, 81; VI: 779); VRÂNCEANU GH. (V: 778, 80, 1, 2, 4, 9, 90, 3, 4; VI: 788, 9, 90, 1, 2, 4; E. G.: 519, 20, 31, 6, 7, 8, 42, 8, 9, 50, 4).

Clasa VI-a: OPREA D. NIFON (VI: 783, 4, 5, 8, 9, 90, 1, 2, 3; E. G.: 625, 7); PAVICA A. VICTOR (VI: 788, 9, 90, 1, 2, 3; E. G.: 544); POPESCU I. BARBU (VI: 785, 6, 8, 9, 90, 1, 2, 3; E. G.: 524); ȚEGU P. TRAIAN (VI: 789, 90, 1, 2).

Clasa VII-a: CĂPRIȚĂ I. G. (VII: 707).

Liceul de fete, Turnu-Severin.

Clasa VI-a: FIROIU I. MARIA (VI: 789, 90, 1, 3).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa IV-a: ANGHELESCU A. GR. FLORIN (IV: 652, 3, 4, 5).

Clasa V-a: BOCÂRNEA C. EUGEN (V: 788, 9); BRAȘOVEANU D. GHEORGHE (V: 781, 8, 9); IOANIȚESCU GH. POMPILIU (V: 788, 9); PÂRȘAN C. MIHAIL (V: 776, 7, 8, 88).

Clasa VI-a: BOLDEA D. CONSTANTIN (VII: 703).

Clasa VII-a: CONSTANTIN P. BOGDAN (VII: 707); IONESCU P. LIVIU (VII: 690, 4, 5, 7, 703, 5, 7; E. G.: 548, 9, 50).

Clasa VIII-a: CARAMALĂU EUGEN (VIII: 605, 6, 7, 9, 12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 22, 3, 4, 5, 31, 2, 3).

Elevi pregătiți în particular.

București. *Clasa VII-a:* BURILEANU O. SANDA (VII: 703, 5, 7).

Mizil. *Clasa VI-a:* PITIȘ E. A. NICOLAE (VI: 787, 8, 90, 1, 2, 3, 4; VII: 704, 5, 6, 7; VIII: 613; E. G.: 531, 6, 40, 9, 50).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Ianuarie 1944

Clasa III-a. *Exerc. 237.* Se dă un cerc cu centrul O şi un punct A pe acest cerc. Construim un al doilea cerc cu centrul în A şi trecând prin O, care taie cercul (O) în punctele B şi C. Fie M a doua extremitate a diametrului punctului O în cercul (A), iar N mijlocul arcului MC. Dreapta NC taie cercul (O) în punctul P. Să se arate:

a) Dreptele MB şi MC sunt tangente cercului (O).

b) Punctul P este diametral opus punctului B în cercul O.

c) Dreapta BC este perpendiculară pe NP.

O. N. Ţ.

III. 238. Să se simplifice fracţia ordinară:

$$\frac{51417703}{3432478031}.$$

O. N. Ţ.

III. 239. Să se găsească laturile patratelor a căror arii sunt: 81 m²; 9801 m²; 998001 m²; 99980001 m²; 9999999800000001 m².

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 671*).* *a)* Să se construiască dreptunghiul ABDC, având lungimea $\overline{AB} = +3+2\sqrt{2}$ şi lăţimea $\overline{AC} = +4-2\sqrt{3}$, unitatea de măsură fiind cât un centimetru.

b) Să se calculeze aria dreptunghiului construit ABDC.

c) Să se găsească pe cale grafică rezultatul obţinut.

(Mărimile $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ *nu* vor fi calculate aproximativ, ci construite exact cu rigla şi compasul).

O. N. Ţ.

---

*) Pentru exerciţiile cu asteric se poate consulta: *Algebra elementară pentru clasa IV-a* de PROF. O. N. ŢINO, *Editura Cugetarea*, Bucureşti.

IV. 672).* *a)* Să se construiască dreptunghiul ABCD, având lungimea $\overline{AB} = +5+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ şi lăţimea $\overline{AD} = +5\sqrt{3}-7$, unitatea de măsură fiind cât un centimetru.

b) Să se calculeze perimetrul dreptunghiului construit.

c) Să se calculeze aria dreptunghiului construit.

d) Să se găsească pe cale grafică rezultatul obţinut.

(Mărimile $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ *nu* vor fi calculate aproximativ, ci construite exact cu rigla şi compasul).

O. N. Ţ.

IV. 673).* X'OX fiind o axă, pe care O este punctul origină iar OX sensul pozitiv, iar unitatea de măsură fiind cât $^1/_2$ centimetru, să se reprezinte *exact* numerele:

$$x = -7+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}$$

$$y = +3-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+6\sqrt{5}$$

$$z = +5-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

precum şi *suma* S şi *produsul* P al acestor numere.

O. N. Ţ.

IV. 674).* Să se construiască numerele:

$$x = -1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$$

$$y = [-1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}]^2$$

$$z + [-1+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{5}]^3,$$

unitatea de măsură fiind luată cât un centimetru.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 795.* Să se verifice identitatea:

$$(n-p)^4+(n-p)^3(m-n)+(n-p)^2(m-n)(m-p)+$$
$$+(n-p)(m-n)(m-p)^2+2(m-n)(m-p)^3 \equiv$$
$$\equiv (m-p)^3(2m-n-p).$$

N. M.

V. 796. Să se arate că expresia:

$$4a^2x^4 + 2a^2bx^3 + (a^2b^2 + 2ac)\,x^2 + 2abcx + c^2$$

este un patrat perfect.

N. M.

V. 797. Să se determine a, b, c astfel ca polinomul

$$x^5 + ax^4 + 2x^3 + bx^2 - 3x + c$$

să se împartă exact prin $x^3 + 1$.

I. I. S.

V. 798. Să se arate că, dacă:

$$(ap + 1)(a^2x + 2a + x) - x(ap - 1)(a^2 - 1) = 4ap(a + x)$$

$$(a + p)(a^2y + 2a + y) - y\ (a - p)(a^2 - 1) = 4a(a + y),$$

atunci $xy = 1$.

I. I. S.

V. 799. In trapezul ABCD ($AB \parallel CD$), diagonala $\overline{AC}$ este egală cu latura $\overline{CD}$. Fie I intersecţia diagonalelor.

Se duce prin I o paralelă la AB, care se taie în P cu paralela dusă din A la latura BC.

Să se arate, că triunghiul IAP este dreptunghic.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 800.* Pe latura OX a unghiului AOX să se determine punctele B, C, D ştiind că unghiurile BAO, CAB, DAC sunt sunt egale şi că lungimile $\overline{OB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ sunt în progresie aritmetică.

GH. B.

VI. 801. Să se arate, că polinomul:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + bx^2 + cx + d - a$$

se divide printr'un polinom de forma $x^n + 1$, unde n este întreg mai mic decât 6.

GH. B.

VI. 802. Dacă a, b, c, d sunt patru numere în progresie aritmetică, avem:

$$a^3 - b^3 - c^3 + d^3 = 3(a - b)(ab - cd).$$

I. I. S.

VI. 803. Să se arate, că polinomul:

$$a^3x^4 - b^3(a^4 + 1)(a^2 + 1)x + a(a^4 + a^2 + 1)b^4$$

se împarte exact cu polinomul:

$$ax^2 - b(a^2 + 1)x + ab^2.$$

Să se determine câtul.

I. I. S.

VI. 804. Să se arate că dacă ecuaţia:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

are o rădăcină dublă, atunci şi ecuaţia:

$$c(b + 2c)x^2 + 2c(b + 2a)x + a(b + 2c) = 0$$

are o rădăcină dublă.

I. I. S.

VI. 805. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x(y^2 - 1) = y(x^2 - 1) \quad ; \quad x^2y^2 + a^2 = a(x^2 + y^2).$$

I. I. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 718.* Să se rezolve ecuaţia trigonometrică următoare:

$$2(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \cos^3 x) - 3\operatorname{tg}^2 x = 0.$$

I. I. S.

VII. 719. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile:

$$E_1 \equiv \cos 2\alpha - \cos\alpha \cos 3\alpha \quad ; \quad E_2 \equiv \cos\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha.$$

I. I. S.

VII. 720. Intr'un triunghiu dreptunghic există relaţia:

$$a^2bc\,(a-b)\,(a-c)\,(\cos B+\cos C-1)^2 =$$

$$=(b+c-a)^2\,(a^2\cos B-b^2)\,(a^2\cos C-b^2).$$

I. I. S.

VII. 721. Intr'un triunghiu oarecare există relaţia:

$$(b+c)\cos\frac{B-C}{2}-a\sin\frac{A}{2}=(b+c-a)\left[\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{5}\right].$$

I. I. S.

VII. 722. Fiind dat un con circular drept, înscris într'o sferă oarecare dată, cu deschiderea de 30^0 (unghiul generatoarei cu înălţimea), să se arate, că se poate înscrie în aceeaşi sferă un con circular drept, cu o deschidere $\theta \neq 30^0$ şi având acelaşi volum cu conul dat.

O. N. Ţ.

VII. 723. Să se stabilească egalitatea numerică:

$$3^6+2.3.(2^2+1)(3^2+1)=(2^5+1)\,C_7^1+2.(2^3+1)\,C_7^2+2.3.C_7^3$$

O. N. Ţ.

VII. 724. Să se calculeze coeficientul termenului al 101-lea din desvoltarea binomului:

$$(x+2)^{200}.$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 636.* Fiind dat un con circular drept de deschidere α (unghiul generatoarei cu înălţimea) înscris într'o sferă oarecare dată, să se arate, că, în general se poate înscrie un al doilea con circular drept, de deschidere $\theta \neq \alpha$, având acelaşi volum cu conul dat, în aceeaşi sferă dată.

O. N. Ţ.

VIII. 637. Fiind dată o sferă (O), să se determine unghiul dela vârf al unui con circular drept circumscris sferei (O), astfel ca raportul suprafeţelor laterale ale celor două conuri cu vârful în centrul sferei şi având ca bază, unul baza conului circumscris, iar celălalt cercul de tangenţă al conului circumscris, să fi egal cu 2.

O. N. Ţ.

VIII. 638. Fiind dată o sferă (O) şi un con circular drept circumscris sferei (O), să se determine unghiul de deschidere al conului astfel că, considerând cele două conuri cu vârful comun în centrul sferei (O) şi având ca baze unul baza conului circumscris, iar celălalt cercul de tangenţă al conului circumscris, raportul volumelor celor două conuri să fie un număr dat k.

Să se arate, că, dacă $k > \frac{27}{4}$, problema este totdeauna posibilă.

Să se examineze cazul $k = \frac{27}{4}$.

O. N. Ţ.

VIII. 639. Fiind date trei puncte A, B C pe o axă, să se determine abscisa unui punct M astfel ca să avem relaţia:

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} = 0.$$

Există totdeauna soluţii.

G. D. S.

VIII. 640. Pe o axă orientată se dau punctele A (+ 1) şi C (+ 5). Să se determine punctele B, D astfel încât C şi D să fie conjugate faţă de A şi B, iar distanţa $\overline{BD}$ să fie de 6 unităţi. Să se figureze datele şi rezultatele.

G. D. S.

VIII. 641. Fie punctele C şi D conjugate armonic faţă de A şi B. Ştiind că $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{3}$, să se determine raportul în care punctele C şi D împart segmentul $\overline{AB}$.

G. D. S.

VIII. 642. Se dau punctele A (— 1), B (+ 5). Să se determine punctele M şi N, conjugate armonic faţă de A şi B, astfel ca $\overline{MN} = 8$.

Să se figureze datele şi rezultatele.

G. D. S.

VIII. 643. Pe o dreaptă orientată se consideră punctele A, B, C, respectiv de abscise *a*, *b*, *c*. Se cere să se formeze ecuaţia care defineşte poziţia unui punct M de pe dreaptă, de abscisă *x*, astfel ca:

$$\overline{MC}^2 = 4\,\overline{AM} \cdot \overline{MB}.$$

In general, sunt două soluţii. Să se arate că pentru ca să fie o singură soluţie, trebuie ca punctul B să împartă în *medie şi extremă raţie* segmentul AC.

G. D. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 555.* Dacă cel mai mic factor prim al unui număr întrece rădăcina a n^a a acelui număr, atunci numărul are cel mult $(n - 1)$ factori primi.

I. L.

E. G. 556. Să se găsească cele mai mici şase numere consecutive, printre care să nu fie niciunul număr prim.

I. L.

E. G. 557. Să se arate că orice număr de forma:

$$n^4 + 4$$

nu poate să fie număr prim.

I. L.

E. G. 558. Să se descompună numărul

1500629

în factori primi.

I. L.

E. G. 559. Dacă a, b, c, d sunt numere prime mai mari ca 5, să se arate că ecuația:

$$b^2 + c^2 + d^2 = 3a^2$$

are soluții.

I. L.

E. G. 560. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă primele n numere prime consecutive, atunci numărul prim imediat superior lui p_n este mai mare ca $(n + 2)$.

I. L.

E. G. 561. Să se arate că într'un șir de $(n + 1)$ numere consecutive, începând cu $n\,(n + 1)$, se găsește cel puțin un număr prim.

I. L.

E. G. 562. Între n și $2n$ se găsesc mai puține numere prime decât între $2n$ și $4n$.

I. L.

E. G. 563. Să se arate, că în primele 10^n numere, avem cel puțin $4n$ numere prime.

I. L.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. N. **Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 220

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 140

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 250

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 140

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 170

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 230

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 250

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 300

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 200

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 160

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ. — C. 20.289

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 2 1 NOEMBRIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9809

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 2 — 1 NOEMBRIE 1943

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 786* *). *Se consideră trapezele* ABCD *care au unghiurile din* A *şi* B *drepte iar diagonala* AC *perpendiculară pe diagonala* BD. *Să se arate că dacă baza* AB *este constantă, produsul* $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ *este constant.*

GH. B.

Triunghiurile BPC şi APC sunt asemeni cu APB. Rezultă egalităţile

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BP}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}$$

care prin înmulţire dau

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{AP}\cdot\overline{PC}}{\overline{BP}^2} \qquad (1)$$

Dar în triunghiul dreptunghic ABC, de înălţime BP, avem

$$\overline{AP}\cdot\overline{PC}=\overline{BP}^2$$

care dusă în (1) dă

$$\overline{BD}\cdot\overline{BC}=\overline{AB}^2=\text{const.}$$

Exerc. 791. Se dă trapezul isoscel ABCD *cu laturile egale* AD, BC *şi cu diagonalele* AC, BD. *Pe* AD, *între* A *şi* D, *se ia un punct* M. *Fie* N *un punct pe* BC, *între* B *şi* C, *aşa încât* DM = BN. *Se complectează paralelogramul* MNBP. *Se cere locul punctului* P, *când* M *se mişcă pe* AD.

GH. B.

*) Enunţ rectificat.

Se observă că

$$\overline{MP} = \overline{BN} = \overline{MD}$$

deci triunghiul PMD este isoscel şi cum

$$\sphericalangle DMP = 2 \sphericalangle MAQ$$

unde Q este intersecţia lui MP cu AB, urmează că

$$2 \sphericalangle MAQ + 2 \sphericalangle MDP = \pi.$$

$$\therefore \quad \sphericalangle MAQ + \sphericalangle MDP = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle MDP = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle MAQ$$

deci DP este perpendiculară pe AB. Locul cerut este prin urmare perpendiculara din D pe AB.

M poate fi luat ori unde pe dreapta AD prelungită de o parte şi de alta.

Dacă paralelogramul MNBP se complectează luând simetricul lui B faţă de mijlocul lui MN atunci locul lui P este perpendiculara din A pe AB.

Clasa VIII-a. *Exerc. 634. Fie* M *mobil pe cercul de diametru* AB. *Să se arate că intersecţia înălţimii* MM′ *cu simediana* AA′ *a triunghiului* ABC *descrie o elipsă.*

GH. B.

Notăm cu P intersecţia tangentelor în B şi M la cercul dat. Dreapta AP este simediana triunghiului AMB. Fie N şi Q intersecţia lui AM cu BP şi a lui AP cu înălţimea MM′.

In triunghiul dreptunghic BMN avem

$$\overline{BP} = \overline{PM}$$

ca tangente duse din P la cerc, deci P este mijlocul lui BN. Cum MM′ este paralelă cu BN urmează că AP trece prin mijlocul Q al lui MM′, deci

$$\frac{\overline{MM'}}{\overline{QM'}} = 2$$

ceea ce arată că Q descrie o elipsă.

Exerciţii Generale. *Exerc. 547. Dacă numărul de patru cifre* cdef *este de una din formele*

$\mathcal{M}\,11+2$, $\mathcal{M}\,11+6$, $\mathcal{M}\,11+7$ sau $\mathcal{M}\,11+8$,

atunci numărul de douăsprezece cifre abbacdefabba, *nu poate fi patrat perfect.*

GH. B.

Avem

$$abba = 1001a + 110b = 11\,(91a + 10b)$$

aşa că

$$N = abbacdefabba = abba \times 100000001 + cdef \times 100000000$$

$$N = \mathcal{M}11 + cdef\,(11 \times 9090909 + 1) = \mathcal{M}11 + cdef$$

Faţă de divizorul 11 un patrat nu poate fi decât de formele

$$\mathcal{M}11\ ,\ \mathcal{M}11 + 1,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ sau } 9.$$

Deci dacă *cdef* nu este de una din aceste forme ci de una din formele din enunţ, atunci N *nu poate* fi perfect.

Până la 1 Octombrie 1943 s'au primit soluţii bune dela:

Liceul „Regele Ferdinand I", Bacău.

Clasa VII-a: FÂNARU N. D-TRU (VII: 703, 14, 5).

Liceul teoretic Fete, Bacău.

Clasa III-a: TEODORESCU MARIANA (III: 232).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş.

Clasa VI-a: MALIŢA A. MIRCEA (VI: 796, 7, 9).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VI-a: CONSTANTINESCU N. ILIE (VI: 796, 7, 8, 9; VII: 714); CRISTACHE AVRAM (VI: 796).

Clasa VIII-a: GAFIŢEANU M. ALEX. (VIII: 639).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa VI-a: LEON AL. MIHAI (VI: 796, 7).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa VI-a: Ieşan Alexandru (VI: 796, 7); Muntz M. Eduard (VI: 796, 7, 8).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa VIII-a: Timotin Al. Alexandru (VII: 709, 10, 4, 6).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa V-a: Haret Sp. Radu (V: 795); Munteanu I. Gheorghe (V: 795); Seni Dinu (V: 795, 7).
Clasa VI-a: Ardare N. Nicolae (VI: 802, 5; E. G.: 556).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa VI-a: Daniilescu C. Const. (VI: 796, 7, 8, 9).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa III-a: Ionescu A. Virgil (III: 233).
Clasa VI-a: Letia L. Valentin (VI: 796, 8, 9).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa VII-a: Andreescu Mihai (VII: 714); Bârzescu Mircea (E. G.: 554); Vasiliu Gh. Dumitru (VII: 709, 10, 2, 3, 5).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa VIII-a: Gâţă Gh. Gheorghe (VIII: 639, 40, 2, 3).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Februarie 1944

Clasa III-a. *Exerc. 240.* BAC fiind un triunghiu isoscel ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Fie $\overline{AD}$ mediana triunghiului şi E punctul unde cercul, cu centrul D şi raza $\overline{DC}$, taie a doua oară latura AC. Să se arate, că BE este înălţime în triunghiul BAC.

O. N. Ţ.

III. 241. Să se găsească cu aproximaţie mai mică ca 0,001 latura patratului a cărui arie este:

$$9000900909 \text{ m}^2.$$

O. N. Ţ.

III. 242. BAC fiind un triunghiu isoscel $(\overline{AB} = \overline{AC})$ şi $\overline{AD}$ mediana lui; fie E punctul unde cercul, cu centrul în D şi raza $\overline{DB}$, taie pe AC. Dreapta BE taie pe AD în H, iar cercul AHC taie pe BE în F.

Să se arate, că AE este mediană în triunghiul BAF.

O. N. Ţ.

Clasa IV-a. *Exerc. 675.* Să se arateţ că, dacă a şi b, c sunt respectiv ipotenuza şi cele două catete ale unui triunghiu dreptunghic, avem relaţia

$$2a\,[(a-b)^3 + c^3] = [(a-b)^2 + c\,(a+b)]\,[(a-b)^2].$$

I. I. S.

IV. 676. Să se descompună în factori expresia:

$$[a\,(x+y) + b\,(xy-1)]^2 + [a\,(xy-1) - b\,(x+y)]^2.$$

G. D. S.

IV. 677. Se prelungesc laturile $\overline{BC}$ şi $\overline{CA}$ ale unui triunghiu echilateral ABC cu lungimile

$$\overline{CD} = \overline{AE} = \overline{BC}.$$

Să se arate că triunghiurile DAC, BAE, ABC sunt echivalente.

GH. B.

IV. 678. Se dă triunghiul ABC şi o dreaptă Δ, care trece prin B. Se ia un punct D pe Δ. Să se arate, că pe Δ există două puncte şi numai două, M şi N aşa încât suprafeţele DAM, DAN să fie egale între ele şi egale cu suprafaţa ABC.

GH. B.

Clasa V-a. *Exerc. 800.* Să se arate, că expresia

$$\frac{\frac{x^2+1}{2x}-\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{x^2-1}{2x}+\frac{2x}{x^2-1}}$$

este un cub perfect oricare ar fi valoarea lui x.

I. I. S.

V. 801. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{abc}+2}{a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}{abc}+2}=$$

$$=\frac{abc-1}{abc+1}\cdot\frac{a-bc}{a+bc}\cdot\frac{b-ac}{b+ac}\cdot\frac{c-ab}{c+ab}.$$

I. I. S.

V. 802. Să se arate, că:

$$\left[\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)\left(\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)+x^3\right]^2\equiv$$

$$\equiv\left[1+\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left[x^6+\left(\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)^2\right].$$

I. I. S.

V. 803. Fie $\overline{AA'}$ înălţimea triunghiului isoscel ABC, cu laturile $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ egale. Se proiectează A' în D pe AC şi B în E pe AD. Paralela din D la BC taie pe AB în F.

Să se arate, că EF este paralelă cu AA'.

GH. B.

V. 804. Să se ducă două cercuri tangente la două cercuri date. Discuţie.

D. S.

Clasa VI-a. *Exerc. 806.* Să se arate că, dacă $ad = bc$, expresia algebrică:

$$\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - d^2)}$$

are una din valorile $(\pm 2ab)$; $(\pm 2cd)$.

I. I. S.

VI. 807. Să se simplifice expresia:

$$E = \frac{\dfrac{1 + ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a+b} + \dfrac{1 - ab + \sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}}{a-b}}{1 + \dfrac{[1+ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]\,[1-ab+\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)}]}{a^2-b^2}}.$$

I. I. S.

VI. 808. Dacă x, y, z, u au valorile:

$$x = (2+\sqrt{2})\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \; ; \; y = (3+\sqrt{3})\sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}} \; ;$$

$$z = (4+\sqrt{4})\sqrt[3]{112 - 52\sqrt{4}} \; ; \; u = (5+\sqrt{5})\sqrt[3]{200 - 80\sqrt{5}},$$

avem egalitatea:

$$x + y + z = u.$$

I. I. S.

VI. 809. Să se găsească valorile lui x, care satisfac condițiilor de inegalitate:

$$-3x^2 + 5x + 2 > 0$$

$$547x^2 - 214x - 333 < 0.$$

O. N. Ț.

VI. 810. Să se determine valorile întregi ale lui x, pentru care avem condițiile de inegalitate următoare:

$$6x^2 + 7x - 143 < 0$$

$$-2x^2 + 7x + 39 > 0.$$

O. N. Ț.

VI. 811. Să se găsească valorile lui x, care satisfac inegalităţile:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 < 0$$

$$8x^4 + 54x^3 + 101x^2 + 54x + 8 < 0.$$

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 725.* Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D \equiv \begin{vmatrix} ab - 1 & a + b & (a^2 + 1)(b^2 + 1) \\ bc - 1 & b + c & (b^2 + 1)(c^2 + 1) \\ ca - 1 & c + a & (c^2 + 1)(a^2 + 1) \end{vmatrix}$$

G. D. S.

VII. 726. Să se demonstreze că determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$

este *nul*, fără a face desvoltarea determinantului.

GH. B.

VII. 727. Să se dea desvoltarea determinantului:

$$D \equiv \begin{vmatrix} a(b - c) & c^2 & b^2 \\ -c^2 & b(c - a) & -a^2 \\ -b^2 & a^2 & c(a - b) \end{vmatrix}$$

sub formă de produs.

I. I. S.

VII. 728. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$D \equiv \begin{vmatrix} ab(\alpha - \beta) & \alpha\beta(a - b) & a\alpha - b\beta \\ bc(\beta - \gamma) & \beta\gamma(b - c) & b\beta - c\gamma \\ ca(\gamma - \alpha) & \gamma\alpha(c - a) & c\gamma - a\alpha \end{vmatrix}$$

folosind proprietăţile determinanţilor.

G. D. S.

VII. 729. Să se stabilească relaţia:

$$A_m^k A_{m-k}^{n-k} \cdot \sum_{k=0}^{k=n-1} C_{m+k}^n = A_m^n C_{m+n}^{m-1},$$

A_p^q şi C_p^q fiind notaţiile obişnuite în teoria combinărilor.

I. I. S.

VII. 730. Să se descompună, în factori raţionali reali, determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & +1 & -1 \\ (\alpha+\beta)^2 & (\alpha-\beta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha-\beta)^2 & (\alpha-\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha+\beta)^2 & (\alpha-\beta)^2 \end{vmatrix}.$$

O. N. Ţ.

VII. 731. Să se descompună, în factori reali raţionali, determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \\ (a+b)^3 & (a\ \ b)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^3 & (a-b)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^3 & (a-b)^3 \end{vmatrix}.$$

O. N. Ţ.

Clasa VIII-a. *Exerc. 644.* Să se spună ce fel de triunghiu formează fiecare grupă de trei puncte:

a) $A(+2+\sqrt{3}, +1)$; $B(+\sqrt{3}, -1)$; $C(-1, -\sqrt{3})$

b) $A_1\left(+1+\sqrt{3}, +\frac{3}{2}\right)$; $B_1\left(+\frac{1}{2}, \frac{+1+\sqrt{3}}{2}\right)$; $C_1\left(+1, +\frac{1}{2}\right)$;

c) $A_2(+1, +2)$; $B_2(+3, -1)$; $C_2\left(\frac{+4+3\sqrt{2}}{2}, \frac{+1+2\sqrt{3}}{2}\right)$.

G. D. S.

VIII. 645. Se dau punctele A(— 3, + 3), B(+ 3, + 7) şi o paralelă la OX la două unităţi deasupra ei.

Să se determine pe această paralelă punctul C astfel ca triunghiul ABC să fie dreptunghic în C.

G. D. S.

VIII. 646. Se dau punctele A(+ 5, + 1) ; (B(+ 3, + 5) ; C(— 3, + 2) ; D(— 1, — 2).

Se iau apoi punctele M şi N astfel ca ele să împartă în acelaşi raport segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$. Să se arate, că oricare ar fi raportul, mijlocul segmentului $\overline{MN}$ este fix. Să se explice geometric.

G. D. S.

VIII. 647. Se dau punctele A (+ 3, 0) şi B (— 1, + 4 $\sqrt{3}$). Să se determine pe segmentul AB un punct M, astfel ca distanţa dela origină la M să fie medie proporţională între segmentele $\overline{AM}$ şi $\overline{MB}$.

G. D. S.

VIII. 648. Să se scrie ecuaţiile înălţimilor triunghiului format de dreptele:

$$x - y + z = 0 \quad ; \quad 2x - y + 1 = 0 \quad ; \quad x + 2y + 2 = 0,$$

fără a calcula coordonatele vârfurilor.

Să se verifice, că sunt concurente.

G. D. S.

VIII. 649. Se dă dreapta: $10x + 7y - 35 = 0$ şi se cere, să se scrie ecuaţia simetricei acestei drepte faţă de punctul P (+ 4, + 3).

G. D. S.

VIII. 650. Pe un segment $\overline{AB}$ se consideră punctul M, care îl împarte în raportul $k = +\frac{1}{4}$ şi punctul N, care îl împarte în raportul $k' = +1$.

Să se exprime distanţa (MN) cu ajutorul segmentului $\overline{AB}$. Generalizare.

G. D. S.

VIII. 651. Se dă un patrulater ABCD având două laturi egale: $\overline{AB} = \overline{CD}$. Să se arate, ca locul geometric al punctelor, care satisfac relaţia

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2,$$

este mediatoarea segmentului, care uneşte mijloacele laturilor egale.

G. D. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 564.* Dacă între primele n numere avem *zece* numere prime, atunci între primele n^2 numere avem cel puţin 21 numere prime.

I. L.

E. G. 565. Dacă $a < b < c$ sunt trei numere prime consecutive, atunci pentru $a \geqq 7$, avem:

$$a^3 > b^2 > c.$$

I. L.

E. G. 566. Să se arate, că cel mai mic şi cel mai mare număr, având acelaşi număr de factori primi, au acelaşi număr de divizori, dacă suma exponenţilor este constantă.

I. L.

E. G. 567. Care este cel mai mic număr de trei cifre, care are cel mai mare număr de divizori.

I. L.

E. G. 568. Să se arate că suma divizorilor unui număr este mai mică decât *numărul divizorilor* înmulţiţi cu *numărul însuşi.*

I. L.

E. G. 569. Să se arate că *produsul* divizorilor unui număr înmulţit cu *numărul însuşi* este mai mic decât numărul ridicat la o putere egală cu numărul divizorilor.

I. L.

E. G. 570. Bipatratul unui *număr perfect par* diferit de 6 are, faţă de 13, resturile 1 sau 4.

I. L.

E. G. 571. Cubul unui număr perfect par, diferit de 496, are, faţă de divizorul 25, resturile:

1, 2, 6, 16, 21.

I. L.

E. G. 572. Produsul divizorilor unui număr perfect par nu poate fi patrat perfect.

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid:** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 20.615

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 3 1 DECEMBRIE 1943

BIBLIOTECA CENTRALĂ
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9808

GAZETA MATEMATICA
SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 3 — 1 DECEMBRIE 1943

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 526. Dacă* $I_x(y)$ *reprezintă numărul numerelor prime cu* y *din şirul numerelor naturale până la* x, *atunci în ce caz avem:*

$$I_x(20) < I_5(20) + I_{x-5}(20).$$

I. L.

Prima cale:

Fie

$$x = A + B \quad ; \quad A = 5 \quad \text{şi} \quad B = x - 5,$$

atunci avem:

$$I_{A+B}(N) = (A+B) - \Sigma E\left(\frac{A+B}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{A+B}{ab}\right) - \Sigma\left(\frac{A+B}{a.b.c}\right) + \ldots$$

unde *a, b, c,...* sunt factorii primi ai lui N.

Cum însă faţă de un divizor oarecare Δ avem:

$$E\left(\frac{A+B}{\Delta}\right) = E\left(\frac{A}{\Delta}\right) + E\left(\frac{B}{\Delta}\right) + E\left(\frac{\tau_A + \tau_B}{\Delta}\right)$$

unde τ_A şi τ_B sunt resturile diviziunii lui A şi B prin Δ, iar:

$$0 \leqslant \frac{\tau_A + \tau_B}{\Delta} < 2$$

atunci vom scrie:

$$I_{A+B}(N) = A - \Sigma E\left(\frac{A}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{A}{ab}\right) - \ldots$$

$$+ B - \Sigma E\left(\frac{B}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{B}{ab}\right) - \ldots$$

$$- \Sigma\varepsilon_1 + \Sigma\varepsilon_2 - \ldots$$

unde $\Sigma\varepsilon_1$, $\Sigma\varepsilon_2$,... reprezintă valorile lui $\Sigma E\left(\frac{\tau_A + \tau_B}{\Delta}\right)$ când Δ ia valorile succesive: *a, b, c,...* apoi: *ab, ac, bc,...* etc.

Dar observăm că valorile maxime sunt:

$$\Sigma\varepsilon_1 = C_n^1 \; ; \; \Sigma\varepsilon_2 = C_n^2 \; ; \ldots$$

Apoi cum:

$$-C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n . C_n^n = -1.$$

Prin urmare:

$$I_{A+B}(N) = I_A(N) + I_B(N) - \varepsilon$$

unde $\varepsilon = 0$ când numerele A sau B, sau când suma lor se împarte exact cu produsul factorilor primi ai lui N şi $\varepsilon = 1$ când nu se împarte exact.

In cazul exerciţiului *526* trebue ca $x - 5$ să nu se împartă exact cu produsul factorilor lui *20.*

A doua cale:

Ştim că:

$$I_x \; (20) = x - \left[E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x}{5}\right)\right] + E\left(\frac{x}{2.5}\right)$$

$$I_5 \; (20) = 2$$

$$I_{x-5}(20) = x - 5 - \left[E\left(\frac{x-5}{2}\right) + E\left(\frac{x-5}{5}\right)\right] + E\left(\frac{x-5}{2.5}\right).$$

Trebue deci să avem:

$$3 < E\left(\frac{x}{2}\right) - E\left(\frac{x-5}{2}\right) + E\left(\frac{x}{5}\right) - E\left(\frac{x-5}{5}\right) - \left[E\left(\frac{x}{10}\right) - E\left(\frac{x-5}{10}\right)\right].$$

Dar ştim că

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{x-5}{2}\right) + 2 + E\left(\frac{\tau_{x-5}+1}{2}\right)$$

$$E\left(\frac{x}{5}\right) = E\left(\frac{x-5}{5}\right) + 1$$

$$E\left(\frac{x}{10}\right) = E\left(\frac{x-5}{10}\right).$$

Deci vom avea:

$$E\left(\frac{\tau_{x-5}+1}{2}\right) > 0$$

adică:

$$x - 5 = 2k + 1,$$

ceea ce ne dă pentru x un număr par.

I. L.

E. G. 527. In ce caz un număr dat este egal cu produsul părților lui alicote?

I. L.

Produsul părților alicote ale unui număr dat N este egal cu produsul divizorilor lui, mai puțin numărul însăși, adică ar trebui să avem:

$$N = N^{\frac{\nu(N)}{2}-1}$$

unde $\nu(N)$ reprezintă numărul divizorilor lui N. De aci rezultă:

$$\nu(N) = 4$$

ceea ce înseamnă că N poate fi sau cubul unui număr prim sau produsul a două numere prime la puterea unu.

I. L.

E. G. 531. Să se scrie divizorii conjugați ai numărului:

$$N = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}.$$

I. L.

Dacă d_i reprezintă, pentru $i = 1, 2, \ldots n$ cei n divizori ai numărului N, atunci avem:

$$d_i \cdot d_{n-i+1} = N.$$

Dacă n este par, atunci numărul grupurilor va fi $\left(\frac{n}{2}\right)$; iar dacă n este impar numărul grupurilor va fi $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, însă un grup va avea factorii egali.

I. L.

E. G. 532. Să se arate, prin considerații de indicatori, că:

$$2431^4 - 35^4 = \mathcal{M}18.$$

I. L.

Numerele prime cu 18 și inferioare lui sunt:

$$1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17.$$

Avem deci:

$$\begin{aligned} 1 + 17 &= 18 \qquad & 17 &= 18 - 1 \\ 5 + 13 &= 18 \quad \text{sau} & 13 &= 18 - 5 \\ 7 + 11 &= 18 \qquad & 11 &= 18 - 7. \end{aligned}$$

Ridicând ultimele egalități la puterea a 4-a și înmulțindu-le, avem:

$$(11 \,.\, 13 \,.\, 17)^4 - (1 \,.\, 5 \,.\, 7)^4 = \mathcal{M}18.$$

I. L.

E. G. 533. Să se arate că numerele de forma:

$$N = 2^{a-1} \,.\, (2^a + 1)^b$$

nu pot reprezenta indicatorul unui număr dat.

I. L.

Numărul N ar putea fi indicatorul lui M de forma:

$$M = 2^x \,.\, (2^a + 1)^y \,.\, (2^z + 1)$$

unde parantezele reprezintă numere prime și unde putem lua oricâte paranteze de forma $(2^z + 1)$.

Atunci ar trebui să avem:

$$\varphi(M) = N = 2^{x+a+z-1} \,.\, (2^a + 1)^{y-1} = 2^{a-1} \,.\, (2^a + 1)^b$$

De unde rezultă:

$$x = 0 \ ; \ z = 0 \ \text{ și } \ y - 1 = b.$$

Deci:

$$M = 2 \,.\, (2^a + 1)^{b+1}.$$

Dar în acest caz:

$$N = 2^a \,.\, (2^a + 1)^b,$$

deci nu este posibil.

I. L.

E. G. 534. Dacă $I_x(y)$ *reprezintă indicatorul lui* y *față de șirul numerelor naturale până la* x, *atunci avem:*

$$I_{100}(10) + I_{1000}(10) = 110 \cdot \varphi(10).$$

I. L.

Știm că:

$$I_{A \cdot B}(N) = A \cdot \varphi(N).$$

Prin urmare:

$$I_{100}(10) = 10 \cdot \varphi(10)$$

$$I_{1000}(10) = 100 \cdot \varphi(10).$$

I. L.

E. G. 535. Pentru ce valori a lui x *și* y *avem:*

$$\varphi(N) \leqslant N - 11$$

unde $N = a^x \cdot b^y$, a *și* b *fiind factori primi, iar* $\varphi(N)$ *indicatorul lui* N.

I. L.

Trebue să avem:

$$a^{x-1} \cdot b^{y-1} \cdot (a-1)(b-1) \leqslant a^x \cdot b^y - 11$$

sau, după simplificări, ne rămâne:

$$a^{x-1} \cdot b^{y-1} \cdot (a+b-1) \geqslant 11.$$

Vom lua $a = 2$ și $b = 3$, adică factorii minimi, atunci avem:

$$2^{x+1} \cdot 3^{y-1} \geqslant 11.$$

De unde obținem: $x \geqslant 1$ și $y > 1$.
Dacă $a = 2$ și $b = 5$, atunci obținem aceleași condițiuni.
Dacă $a = 3$ și $b = 5$, avem: $x \geqslant 0$ și $y > 1$.
Deci înafară de cazul când $a = 2$, avem $x \geqslant 0$ și $y > 1$.
Pentru $a \geqslant 11$ putem avea și $y = 1$.

I. L.

E. G. 542. Să se arate că avem:

$$2(n-1) \leqslant \sum_{1}^{n} \varphi(i) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

$\varphi(i)$ *fiind indicatorul lui* i, *iar* $n \geqslant 5$.

I. L.

Ştim că pentru $i > 2$ avem $\varphi(i) \geqslant 2$, iar $\varphi(i) \leqslant i-1$, prin urmare:

$$1+1+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{n-2} \leqslant \varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n) \leqslant 0+1+2+\ldots+(n-1).$$

I. L.

E. G. 544. Dacă $\varphi_i(N)$ *reprezintă indicatorul de ordinul* i *a lui* N *şi dacă* $\varphi_n(N)=1$, *atunci pentru* $N=2^{2\alpha}.3^{\alpha}$ *avem* $n=3\alpha$.

I. L.

Avem:

$$\varphi_1(N) = 2^{2\alpha}.3^{\alpha-1}$$
$$\varphi_2(N) = 2^{2\alpha}.3^{\alpha-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_\alpha(N) = 2^{2\alpha}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{3\alpha}(N) = 1.$$

I. L.

E. G. 545. Dacă $\Pi(n)$ *reprezintă produsul numerelor prime cu* n *şi mai mici decât el, atunci avem de multe ori:*

$$\Pi(n) - 1 = \mathcal{M}n.$$

I. L.

Ştim că:

$$[\Pi(n)]^2 - 1 = \mathcal{M}n$$

$$\therefore \quad [\Pi(n)-1].[\Pi(n)+1] = \mathcal{M}n.$$

Deci în multe cazuri vom avea relaţia satisfăcută.

I. L.

Până la 1 Noembrie 1943 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa VI-a: Ardelean I. Mioara (VI: 802, 4, 5); Jurcan A. Aurica (VI: 800, 1, 2); Munteanu C. Margareta (VI: 800, 1, 2).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: Manoliu S. Mihai (VI: 796).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa VI-a: Sasu I. Ioan (VI: 790, 2; E. G.: 537).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa VII-a; Cazacu V. Vlad (VII: 726).

Liceul „Dr. Ioan Meșotă", Brașov

Clasa V-a: Grancea V. Virgil (V: 797).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa VII-a: Emanoil C. Ana (VII: 720).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa V-a: Doneaud E. André (V: 795, 6, 7, 8, 803; VI: 801); Haret Sp. Radu (V: 797); Seni Dinu (V: 796, VI: 802).
Clasa VI-a: Ardare N. Nicolae (VI: 803, 4).
Clasa VII-a: Mustăcescu V. Traian (VII: 719, 20, 1).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa VII-a: Șerban N. Dumitru (VII: 718).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa V-a: Dumitrescu F. Sorin (VI: 795, 6, 7, 802, 4, 5).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa VII-a: Ieșan Alex. (VII: 718, 9, 20, 1).

Liceul „Știrbei-Vodă", Călărași.

Clasa VI-a: Constantinescu D. Petre (VI: 801, 2).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa VII-a: Barbu A. Ioan (VII: 718, 9, 20, 1); Grigore A. Gheorghe (VII: 718, 9, 20, 1).

Liceul Internat, Iași.

Clasa VII-a: Moraru Th. Mircea (VII: 718, 9, 30).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa V-a: Constantinescu R. D. Mihai (VI: 796, 7, 8, 9; VII: 711, 4, VIII: 635).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa VII-a: Columbeanu D. Petre (VII: 718, 9, 20, 1).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa V-a: Alexa Gh. Adrian (V: 795, 6, 8, VI: 801, 5).

Clasa VI-a: Cochela I. Livius (VI: 801, 2, 4, 5); Filimon Ion (VI: 801, 3, 4, 5); Rogoz N. Ion (VI: 802, 4, 5); Vrânceanu Gh. Gh. (VII: 718, 9. 20, 801, 2, 3, 4, 5).

Clasa VII-a: Constantinescu A. Constantin (VII: 718, 9); Cârstea D. Marin (VII: 718); Oprea D. Nifon (VII: 718, 9); Pavica Victor (VII: 718, 9); Popescu I. Barbu (VII: 718, 9, 20); Tincu C. Constantin (VII: 718, 9, 20, 1, 3).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa III-a: Anghelescu Virigliu (E. G.: 239); Siminica I. Vladimir (E. G.: 239).

Clasa V-a: Anghelescu A. Grigore (V: 795, 6); Ioanițescu Gh. Pompiliu (V: 796, 7, 8, 800, 1); Manasia C. Mihai (V: 796, 7); Muică P. Nicolae (V: 795, 6, 7); Păun A. Constantin (V: 796, 7); Rogoveanu P. Petre (V: 797); Roșeanu I. Ion (V: 795, 6, 7, 8, 800); Stroescu I. Sabin (V: 795, 6, 7).

Clasa VI-a: Aldescu T. Marin (VI: 801, 2, 5); Brașoveanu D. Gheorghe (VI: 802, 4, 5, 7; VII: 730); Despa P. Gheorghe (VI: 802, 3, 5); Mihăilescu Gh. D-tru (VI: 802, 3, 4, 5); Muscalu Gh. Alex. (VI: 802, 3, 5); Nicolicioiu L. Ion (VI: 802, 3, 5); Pârșan C. Mihail (VI: 802, 3, 4, 5); Puicea Em. Aristide (VI: 802, 4, 5); Vișan D. Mihai (VI: 802, 3, 4, 5).

Clasa VII-a: Cazacu C. Ion (VII: 719); Mieilă I. Emil (VII: 718, 9); Pletea C. Statie (VII: 718, 9); Sabiescu C. Stelian (VII: 718, 9).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Martie 1944

Clasa III-a. *Exerc. 243.* Se construeşte un triunghiu echilateral ABC. O paralelă la latura BC taie pe AB în D, iar pe AC în E. Fie $\overline{BF}$ perpendiculara, care măsoară distanţa punctului B la dreapta DE.

Să se demonstreze, că avem

$$\overline{BD} = 2\overline{DF}.$$

V. Gh.

III. 244. Se construieşte un triunghiu echilateral ABC. Să se arate, cum trebue să fie construite dreptunghiurile ABDE şi ACFG, pentru ca segmentul O_1O_2, care uneşte centrele de simetrie O_1 şi O_2 ale celor două dreptunghiuri construite, să fie împărţite de laturile AB, AC în trei părţie egale

$$\overline{O_1M} = \overline{MN} = \overline{NO_2}.$$

V. Gh.

III. 245. Se dau două unghiuri cu laturile paralele XOY şi X'O'Y'; apoi un punct fix A pe OX şi un punct fix B pe OY. Se uneşte O cu O' şi se ia un punct M pe dreapta OO'. Dreapta MA taie pe O'X' în P, iar dreapta MB taie pe O'Y' în Q. Să se arate, că, dacă punctul M se mută pe OO', dreapta PQ se mută paralel cu ea însăşi.

G. D. S.

Clasa IV-a. *Exerc. 679.* Să se arate, că:

$$(ax+by)(a'x'+b'y')+(ax+cz)(a'x'+c'z')+(ax+dt)(a'x'+d't')+(by+cz)(b'y'+c'z')+(by+dt)(b'y'+d't')+(cz+dt)(c'z'+d't')+-(ax+by+cz+dt)(a'x'+b'y'+c'z'+d't')=(a'x+b'y)(ax'+by')+(a'x+c'z)(ax'+cz')+(a'x+d't)(ax'+dt')+(b'y+c'z)(by'+cz')+(b'y+d't)(by'+dt')+(c'z+d't)(cz'+dt')-(a'x+b'y+c'z+d't)(a'x+by'+cz'+dt').$$

N. M.

IV. 680. Să se arate, că

$$n(m-p)^3 - p(m-n)^3 - m^3(n-p) = np(p-n)(3m-n-p).$$

N. M.

IV. 681. Să se arate, că

$$-n^2(m-p)^3+p^2(m-n)^3+n^2p^2(n-p)=m^2(n-p)(3np-mn-mp).$$

N. M.

IV. 682. Să se arate, că

$$\frac{x(1+y)}{(x-y)(x-1)}+\frac{y(1+x)}{(y-x)(y-1)}+\frac{x+y}{(x-1)(y-1)}=-1.$$

N. M.

Clasa V-a. *Exerc. 805.* Să se descompună în factori expresia

$$E \equiv (a+b)(a+x)(b+y)+bx(a+x)+ay(b+y).$$

G. D. S.

V. 806. Dacă $a(1-b)=b(1-c)=c(1-a)$, să se arate, că

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+24abc.$$

C. I. T.

V. 807. Să se arate, că

$$-n(m-n)(m-p)^3+p(m-p)(m-n)^3+$$
$$+m^3(n-p)(m-n-p)=+np(n-p)(np-mn-mp).$$

N. M.

V. 808. Să se stabilească identitatea

$$\Sigma(a+1)^2(b-c)(b-1)(c-1)=4(a-b)(a-c)(b-c).$$

I. I. S.

V. 809. Fie AA', AA'' bisectoarele unghiului A al triunghiului BAC dreptunghic în A. Cercurile de centre A', A'' şi raze $\overline{A'A}$, $\overline{A''A}$ se întâlnesc a doua oară în P.

Să se demonstreze, că PA', PA'' taie cercul ABC în două puncte diametral opuse.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 812.* Să se stabilească identitatea

$$\left[1+\frac{x-1}{i(x+1)}\right]^2+\left[1+\frac{i(x+1)}{x-1}\right]^2=4x\left[\frac{1}{x+1}+\frac{i}{x-1}\right].$$

I. I. S.

VI. 813. Să se arate că

$$\frac{\sin 68^0 42'}{\sin 68^0 02'}=\sqrt[500]{10}$$

cu *cinci* zecimale exacte.

N. M.

VI. 814. Să se arate că avem

$$\operatorname{tg}3a-\operatorname{tg}a-2\cos 2a\,(\operatorname{tg}3a+\operatorname{tg}a)=2\operatorname{tg}3a\,.\,(1-2\cos 2a).$$

I. I. S.

VI. 815. Să se facă calculabile prin logaritmi expresiile

$$E_1\equiv\cos 2\alpha-\cos\alpha\cos 3\alpha$$

$$E_2\equiv\cos\alpha\sin 3\alpha-\sin 2\alpha.$$

I. I. S.

VI. 816. Să se rezolve ecuaţia

$$3(\cos 2x+1)-2(\sin 3x+\sin^3 x)-\sin x\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=0.$$

V. GH.

VI. 817. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos x\,(\sin x - \cos x) + 4\cos\frac{x}{2}\sin^3\frac{x}{2} = 0.$$

I. I. S.

Clasa VII-a. *Exerc. 732.* Să se calculeze determinantul

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{1-a} \\ 1-\frac{1}{a} & \frac{1}{1-a} & a \\ \frac{1}{1-a} & a & 1-\frac{1}{a} \end{vmatrix}.$$

C. I. Ţ.

VII. 733. Să se afle valoarea fracţiei

$$E \equiv \frac{\sqrt[6]{a}\,(\sqrt[3]{x}-1) - \sqrt[6]{x}\,(\sqrt[3]{a}-1)}{\sqrt[6]{a}\,(\sqrt[6]{x}-1)^2 - \sqrt[6]{x}\,(\sqrt[6]{a}-1)^2}$$

pentru $x = a$.

I. I. S.

VII. 734. Să se arate, că

$$(m+1)^2\,C_m^n\,C_m^{n+1} - (n+1)(m-n)\,[C_{m+1}^{n+1}]^2 = 0,$$

unde $n < m$.

I. I. S.

VII. 735. Să se stabilească relaţia

$$(m-n)\,C_m^{n+1} - (n+1)\,C_m^n = (m-2n+1)\,C_{m+1}^{n+1}.$$

I. I. S.

VII. 736. Să se arate că

$$C_m^n \cdot C_{m-1}^n \cdot C_{m-2n}^n \cdots C_{m-pn}^n = \frac{m!}{(n!)^{p+1}\,[m-(p+1)n]!}.$$

N. M.

VII. 737. Să se arate, că

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2+k^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 & a+b & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \\ (b+c)^2+k^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 & b+c & \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ (c+a)^2+k^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)^2 & c+a & \frac{1}{c}+\frac{1}{a} \end{vmatrix} = 0.$$

N. M.

VII. 738. Să se rezolve sistemul

$$(a-b)x+(b+c)y+(c+a)z=0$$
$$(b-c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$$
$$(c-a)x+(a+b)y+(b+c)z=0.$$

I. I. S.

Clasa VIII-a. *Exerc. 652.* Să se pună sub forma $a+ib$ numărul complex

$$\frac{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}{m+i}.$$

Generalizare.

I. I. S.

VIII. 653. Se dau în raport cu sistemul de axe ortogonale OX, OY punctele A(3, 0); B(0, 1); C(4, 8). Să se arate, că triunghiul ABC este isoscel şi să se scrie ecuaţiile laturilor lui.

2°. Să se calculeze aria acestui triunghiu.

3°. Să se arate, că vârful C este situat pe cercul cu centrul în originea O şi cu raza $R = 4\sqrt{5}$.

4°. Presupunând punctul C mobil pe acest cerc, iar punctul A fix, să se afle locul mijlocului M al segmentului AB.

V. Gh.

VIII. 654. Se dau punctele A(+25, −15) şi B(−7, 9). Să se găsească două puncte M şi N conjugate armonic faţă de A şi B astfel ca să avem

$$\overline{OM}^2+\overline{ON}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2.$$

G. D. S.

VIII. 655. Se dau punctele A(— 2, + 4), B(+ 5, + 1) şi o paralelă la OY la distanţa $\frac{1}{2}$, care întâlneşte segmentul AB în punctul M. Se cere:

a) Raportul în care M împarte segmentul AB.

b) Ordonata punctului M.

G. D. S.

VIII. 656. Să se calculeze proiecţia segmentului determinat de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ pe direcţia dată de coeficientul unghiular *m*.

G. D. S.

VIII. 657. Să se calculeze distanţa între dreptele paralele

$$48x + 14y - 21 = 0 \quad \text{şi} \quad 24x + 7y - 28 = 0.$$

Aceeaşi problemă pentru cazul când dreptele paralele au ecuaţiile

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{şi} \quad Ax + By + C' = 0.$$

Să se aplice rezultatul găsit în cazul particular de mai sus, spre verificare.

G. D. S.

VIII. 658. Să se scrie ecuaţiile bisectoarelor interioare ale triunghiului format de punctele A(3, 1); B(2, 4) şi origina axelor de coordonate. Să se verifice că sunt concurente.

Să se calculeze coordonatele centrului cercului înscris triunghiului şi raza acestui cerc.

G. D. S.

VIII. 659. Fie OX, OY două axe perpendiculare şi P un punct în plan; Q proiecţia lui P pe OX; M mijlocul segmentului OQ; I mijlocul segmentului OM; C intersecţia perpendicularelor în M pe PM şi în I pe OX; F un punct pe OY, de aceeaşi parte cu P şi G un punct pe CI, de cealaltă parte a axei OX faţă cu P, astfel ca

$$\overline{OF} - \overline{IG} = \frac{1}{8}\overline{PQ}.$$

Să se arate, că $\overline{CF} = \overline{CG}$.

N. M.

Exerciţii Generale. *Exerc. 573.* Să se arate, că expresia

$$E \equiv 17^p + r \cdot 17^{p-q}\, 5^q - r \cdot 17^{p-2q}\, 5^{2q} - 5^p$$

se divide cu 12, oricare ar fi întregii pozitivi p, q şi r.

I. I. S.

E. G. 574. Să se arate că, dacă n este numărul cifrelor lui N, atunci $2n < N$.

GH. B.

E. G. 575. Care este restul diviziunii prin numărul prim p al sumei

$$A^{(p-2)^n} + B^{(p-2)^{n+1}}.$$

I. L.

E. G. 576. Să se arate că

$$\Sigma\, a^\alpha \left[a^{\varphi\left(\frac{N}{a^\alpha}\right)} - 1\right] = \mathcal{M}\, N,$$

unde $N = a^\alpha b^\beta \ldots$ şi $\varphi(i)$ este indicatorul lui i.

I. L.

E. G. 577. Dacă a este impar, atunci

$$a^{128} - 1 = \mathcal{M}\, 272.$$

I. L.

E. G. 578. Să se arate, că

$$3^9 (3^{256} - 1) = \mathcal{M}\, 17 \cdot 257 \cdot 512.$$

I. L.

E. G. 579. Se zice că numerele A şi B sunt amice (sau amiabile) când satisfac relaţiile:

$$A = s(B) - B \quad \text{şi} \quad B = s(A) - A,$$

unde $s(i)$ este suma divizorilor lui i.

Să se arate, că, dacă A şi B sunt două numere amice, avem

$$s(A \cdot B) < A \cdot s(B) + B \cdot s(A).$$

I. L.

E. G. 580. Dacă A şi B sunt două numere amice şi $s(i)$ este suma divizorilor lui i, avem:

$$[s(A)]^2 + [s(B)]^2 = 2[A \cdot s(A) + B \cdot s(B)].$$

I. L.

E. G. 581. Dacă A şi B sunt două numere amice, iar a şi b două numere oarecare, avem

$$(a+b)(A+B) = a \cdot s(B) + b \cdot s(A).$$

I. L.

INSTRUCŢIUNI

a) Soluţiile exerciţiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală şi numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluţionarea unui exerciţiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exerciţiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus şi se vor coase sau lipi odată cu soluţia.

Nu se vor trimite soluţiile mai multor exerciţii pe aceeaşi foaie.

b) Redactarea soluţiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exerciţiului, dedesubt enunţul astfel cum e publicat în revistă, cu iniţialele propunătorului, apoi soluţia clar compusă, iar la sfârşit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa şi şcoala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluţiile iscălite de 2 sau mai mulţi corespondenţi, nici soluţiile exerciţiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluţiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exerciţiului, numai dela abonaţii „Suplimentului cu Exerciţii" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . Lei 250

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 21.063

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 4 — 1 IANUARIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9809

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 4 — 1 IANUARIE 1944

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 549. Ce devine produsul a două numere, dacă pe primul îl sporim cu al doilea şi pe al doilea cu primul?*

I. L.

$P = ab.$

$P' = (a+b)(b+a) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Prin urmare:

$P' = 2P + a^2 + b^2.$

E. G. 551. Cu ce număr trebue să înmulţim un număr perfect par, pentru a obţine un patrat sau un cub perfect?

$$2^n . (2^{n+1} - 1) . x = A^\alpha$$

unde paranteza este un număr prim. Atunci

$$x = 2^{n(\alpha-1)} . (2^{n+1} - 1)^{\alpha-1}.$$

E. G. 552. Ce condiţie trebue să îndeplinească n *pentru ca să avem:*

$$a^{m\varphi(p)} - (n.p)^m - 1 = \mathcal{M}(m.n.p)$$

unde $\varphi(p)$ *este indicatorul lui* p?

I. L.

Observăm că, în baza teoremei lui FERMAT generalizată de EULER, avem:

$$a^{\varphi(p)} - 1 = n.p = \mathcal{M}p.$$

Vom avea deci:

$$[a^{\varphi(p)}]^m = [n \cdot p + 1]^m = (n \cdot p)^m + \mathcal{M}(m \cdot n \cdot p) + 1.$$

Sau:

$$a^{m\varphi(p)} - (n \cdot p)^m - 1 = \mathcal{M}(m \cdot n \cdot p).$$

Trebue dar să avem:

$$n = \frac{a^{\varphi(p)} - 1}{p}.$$

E. G. 553. In ce caz numerele a *şi* b *satisfac relaţia:*

$$[\sigma(a)]^{2\sigma(b)} - [\sigma(b)]^{2\sigma(a)} = \mathcal{M}(a \cdot b)$$

unde $\sigma(i)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* i *şi mai mici decât* i?

I. L.

Fie:

$$A^2 - B^2 = \mathcal{M}(ab)$$

unde $A = \mathcal{M}a$ şi $B = \mathcal{M}b$, apoi dacă A şi B nu se împart respectiv cu b şi a, avem:

$$A - 1 = \mathcal{M}b \text{ şi } B - 1 = \mathcal{M}a.$$

Se observă deci lesne că:

$$A + B = \mathcal{M}a + 1 = \mathcal{M}b + 1 = \mathcal{M}(a \cdot b) + 1$$

şi

$$A - B = \mathcal{M}a - 1 = \mathcal{M}b + 1.$$

Ar trebui deci să avem:

$$A - B = \mathcal{M}(ab)$$

ceea ce nu este posibil.

Nu rămâne decât cazul când:

$$A = \mathcal{M}(a \cdot b) = \alpha \cdot (a \cdot b)^m \quad \text{şi} \quad B = \mathcal{M}(a \cdot b) = \beta \cdot (a \cdot b)^n.$$

Ar trebui deci să avem:

$$\left[\frac{1}{2}\varphi(a)\right]^{\sigma(b)} \cdot a^{\sigma(b)-m} = \alpha \cdot b^m$$

$$\left[\frac{1}{2}\varphi(b)\right]^{\sigma(a)} \cdot b^{\sigma(a)-n} = \beta \cdot a^n$$

sau prin înmulțire deducem că:

$$\sigma(a) \geqslant m+n \quad \text{și} \quad \sigma(b) \geqslant m+n.$$

I. L.

Până la 1 Decembrie 1943 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a VI-a: Ardelean I. Mioara (VI: 801).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș.

Clasa a V-a: Chirilă A. Radu (V: 795, 800, 1).
Clasa a VI-a: Florian D. Costea (VI: 802, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 1); Gavril L. Cosma (VI: 806, 7, 8); Moldovan I. Mircea (VI: 808).
Clasa a VII-a: Malița A. Mircea (VII: 718, 9, 26, 30, 1).

Liceul „Sf. Vasile", Blaj.

Clasa a IV-a: Călinescu Gh. Gh. Emil (IV: 671, 2, 3); Iluțiu St. Ovidiu (IV: 672).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VIII-a: Marian Th. Mircea (VIII: 639, 40, 1, 2, 3).

Liceul „Dr. Ion Meșotă", Brașov

Clasa a V-a: Ionescu St. Ion (V: 795).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa a IV-a: Alexe Manuela (IV: 680); Angelescu D. Magda (IV: 680); Anițan I. Cornelia (IV: 676, 7, 80); Chirulescu Natalia (IV: 680); Stoenescu M. Maria (IV: 680).

Clasa a V-a: Baron Ecaterina (V: 800); Diță Antoneta (V: 797, 801); Furtunescu I. Doina (V: 797, 800); Gurău Cecilia (V: 797, 800, 7); Mihai I. Maria (V: 797, 800); Moșoianu N. Cezarina (V: 797, 800); Nanes Constanța (V: 807); Nicolau N. Elena (V: 797, 800); Popescu C. Teodora (V: 797, 800); Spineanu Carmen (V: 800, 7); Vintilescu St. Violeta (V: 797, 800).

Clasa a VI-a: Calciu D. Maria (VI: 800, 4); Caramalău A. Cornelia (VI: 802, 4); Ionescu Cornelia (VI: 800, 1, 3, 5); Miuța S. Florica (VI: 804).

Clasa a VII-a: O'Kelly A. Myriam (VII: 718, 26); Nedelcu St. Vasilica (VII: 718, 23); Popescu D. Ligia (VII: 718, 26); Simionescu I. Ligia (VII: 726); Stoenescu A. Felicia (VII: 718, 23); Țeican D. Maria (VII: 718, 23, 30, 1, 3, 4, 5, 8); Vasilescu M. Mariana (VII: 726, 30, 1).

Clasa a VIII-a: Burileanu O. Sanda (VIII: 640, 2); Jitariu I. Florica (VIII: 640, 2).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", București.

Clasa a VII-a: Răitaru I. Olimpia (VII: 718, 9).

Liceul „Cantemir Vodă", București.

Clasa a VII-a: Diaconescu Grigore (VII: 718, 20, 6, 31).

Liceul „Gheorghe Lazăr", București.

Clasa a VII-a: Costescu L. Lucian (VII: 718, 9, 20).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VII-a: Ieșan Alexandru (VII: 726, 9, 30).

Liceul „Gheorghe Șincai", București.

Clasa a VII-a: Danielescu C. Const. (VII: 718, 9, 20).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa a V-a: Cojocaru I. Anatolie (V: 795, 6, 7, 8, 807, 8); Haret Sp. Radu (V: 796); Munteanu L. Gheorghe (V: 800); Seni Dinu (V: 800, 2).

Clasa a VI-a: Ardare N. Nicolae (VI: 806, 7); Cantuniar I. Cristu (VII: 734); Mateescu Gh. Arghir (VII: 726, 30, 3).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a VII-a: Soare V. Mircea (VII: 719, 20, 6).

Institutul „Sf. Maria", București.

Clasa a VI-a: Atanasiu C. Rodica (VI: 804, 5).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa a VI-a: Constantinescu D. Petre (VI: 804, 5); Gheorghiu Şt. Laurenţiu (VI: 802).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa a VII-a: Barbu Ion (VII: 726, 9, 30, 1); Grigore A. Gheorghe (VII: 726, 9, 30, 1).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare", Cernăuţi.

Clasa a VI-a: Astaloş Traian (VI: 806, 7, 8, 9, 10); Cârstea P. Stan (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Cheşcă N. Ioan (VI: 806, 7, 8, 9, 10); Constantinescu E. Emil (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Crişan Anton (VI: 806, 7, 8, 9, 10); Dobrin M. Ion (VI: 810); Gheorghiu Mihai (VI: 806, 8, 9, 10); Grigoraş Gheorghe (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Grigorescu I. Nicolae (VI: 808, 9, 10); Hreniuc C. Aurel (VI: 806, 8, 9); Jemna Iacint (VI: 806, 10); Juvendeanu C. (VI: 806, 9, 10); Leru Alexandru (VI: 806); Marinescu Stelian (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Mihălceanu Ştefan (VI: 806, 7, 8, 10); Mocanu Mircea (VI: 806, 9, 10); Negulescu P. Ionel (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Nicolescu C. Corneliu (VI: 806, 8, 9, 10); Petrea Aurel (VI: 806, 8, 9, 10); Popescu Stelian (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Radu M. Constantin (VI: 806, 9); Rădăcineanu Ovidiu (VI: 806, 8, 9, 10); Roşca Emil (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Silişteanu D. D. (VI: 806, 7, 8, 9, 10); Staricu N. Mihai (VI: 806, 7, 8, 9, 10); Ştefănescu Gr. Mihai (VI: 807, 10); Sturdza Alexandru (VI: 806, 8); Teodorescu E. Ioan (VI: 806, 7, 8, 9, 10).

Clasa a VII-a: Bădârcă Gr. Ioan (VII: 726, 30, 1); Damian V. Corneliu (VII: 718, 9, 21, 3, 7, 30, 1, E. G.: 558); Dilski M. Cazimir (VII: 718, 9, 21, 6, 31); Guţu P. Constantin (VII: 718, 9, 21); Nicolaescu I. Viorel (VII: 718, 9, 21, 30, 1); Popescu Honoriu (VII: 718, 26, 30, 1); Prisecaru Mircea (VII: 718, 9, 21, 6, 30); Sintescu V. Mihai (VII: 718, 9, 26).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa a V-a: Avram O. Liviu (V: 800); Bornaş N. Constantin (V: 797); Dinescu A. Constantin (V: 797); Mateescu D. Gheorghe (V: 797, 800); Marica D. Liviu (V: 797); Nicolescu C. Ion (V: 797, 800); Răduţ I. Mihail (V: 797, 800); Vişian Gh. Anton (V: 800); Voica Al. Mircea (V: 797, 800).

Liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova.

Clasa a VII-a: Dobrişan N. Alex. (VII: 718).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa a VII-a: Bălan S. Adrian (VII: 718, 9).
Clasa a VIII-a: Triandaf Ionel (VIII: 639, 42).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa a III-a : Didilescu V. Traian (III : 240) ; Midvichi Ioan (III : 240, 1).

Clasa a IV-a : Huideş Alex. (IV : 677) ; Tohan Aurel (V : 795, 6).

Clasa a V-a : Paraschivescu Marcel (V : 802) ; Pintilescu Gh. Vasile (V : 797) ; Vlad Mircea (V : 800, 2, 3).

Clasa a VI-a : Bârzescu Mircea (VI : 802, 3, 4, 5, 7, 8) ; Ciureanu Gh. Constantin (VI : 807, VII : 718) ; Nache D. D-tru (VI : 801, 2, 3, 4, 5, 8).

Clasa a VII-a : Damian N. Ştefan (VII : 719, 26) ; Dimitriu A. Mircea (VII : 726) ; Floareş I. Gheorghe (VII : 730) ; Ioan I. Emilian (VII : 726, 30) ; Mihăilescu I. Ştefan (VII : 726) ; Roşu Tr. Nicolae (VII : 719, 26, 30, 1).

Liceul „Petru Rareş", Piatra-Neamţ.

Clasa a VI-a : Bârzescu Alexandru (VI : 802, 3, 4, 5, 6).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa a VI-a : Constantinescu R. Mihai (VI : 801, 2, 3, 4, 8, 9, 10, VII : 718, 20, 2, 3, VIII : 636).

Clasa a VII-a : Buzatu D. Constantin (VII : 726, 32).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a : Badea Mihail (V : 798, 800, 2, 6) ; Iamandi S. Constantin (V : 797, 8, 800, 2, 3) ; Progreseanu Al. Alexandru (V : 798, 9, 800) ; Puchiu Ion (V : 797, 800, 2) ; Rădulescu Dan (V : 797, 8, 800, 3, 6, VI : 810) ; Vladimir N. Constantin (V : 794, 7, 8, 800, 2, 3).

Clasa a VII-a : Columbeanu D. Petre (VII : 723, 6, 7, 8, 9, 30, 1) ; Marinescu M. (VII : 718, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 30, 1).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuţi.

Clasa a III-a : Cazacu Gh. Marcel (III : 238, 9).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa a IV-a : Porfireanu Gh. Dan (IV : 671).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timişoara.

Clasa a V-a : Costache M. Nicolae (V : 795) ; Stanciu V. Petre (V : 795) ; Tripşa Iosif (VI : 795, 7).

Clasa a VII-a : Sarengău M. (VII : 726) ; Strati P. Ionel (VII : 726, 31, 3, 4, 5, 7, 8, E. G. : 573).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa a V-a: Badea M. (V: 803); Puchiu Th. Ion (V: 803); Stanciu V. Petre (V: 800); Tripşa Iosif (V: 800).

Clasa a VI-a: Cochela I. Livius (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1); Filimon Fl. Ignel (VI: 802, 8, 9, 10, 1); Gogulescu A. Petre (VI: 802, 4, 7, 8); Iordănescu Virgil (VI: 801, 2, 4); Mărmureanu Gheorghe (VI: 892, 4, 7); Popescu C. Ovidiu (VI: 801, 2, 3, 9, 8, E. G.: 558); Rogoz N. Ion (VI: 801, 3, 6, 7, 8, 9, 10, E. G.: 558); Streja Iorgu (VI: 801, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 1); Teodorescu St. Alexandru (V: 801, 2, 5); Vrânceanu Gh. Gheorghe (VI: 806, 7, 8, 9, 10, 1, VII: 721, 6, 7, 9).

Clasa a VII-a: Bancu Emil (VII: 720, 38); Bărboiu C. Grigore (VII 726, 38); Chiriac V. (VII: 726); Constantinescu A. Constantin (VII: 720, 6, 30, 1); Nedelcu J. Ulise (VII: 726, 32, 3); Oprea D. Nifon (VII: 720, 6, 30, 1); Pavica Victor (VII: 720, 6, 30, 1); Popescu I. Barbu (VII: 720, 6, 30, 1); Şerengău Mihai (VII: 720, 3); Şorop I. Petre (VII: 726, 30); Stan St. A. (VII: 726); Ştefănescu Gheorghe (VII: 726); Ştefănescu B. Ştefan (VII: 726); Strati P. Ion (VII: 726, 32, 3, 8); Vineş I. Const. (VII: 726).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa a VII-a: Firoiu I. Maria (VII: 718, 9, 20, 6); Meilă Emilia (VII: 726).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a III-a: Jitea D. Dumitru (III: 239).

Clasa a V-a: Angelescu A. Grigore (V: 797, 8, 800); Bădulescu I. Ionel (V: 796, 7, 800, VI: 806, 8); Bălănescu I. Haralambie (V: 800, 2); Călugăru I. Dumitru (V: 795, 6, 7, 8, 800, 1, 6, 7, 8); Enea I. Gheorghe (V: 795, 6, 7, 8, 800, 2, VI: 806, 7, 8); Gărdănescu M. Radu (V: 795, 6, 7, 8, 800, 2); Giurescu I. Ion (V: 796, 7, 8, 800); Ioaniţescu Gh. Pompiliu (V: 802, VI: 808: Moşteoru Gh. Dumitru (V: 795, 6); Muică T. Nicolae (V: 800, 1, 2, VI: 808); Popa D. Iosif (V: 796, 7, 800); Rogoveanu N. Petre (V: 795, 6, 800, 2); Roşeanu I. Ion (V: 806, 7, 8); Stroescu I. Sabin (V: 798, 800, VI: 808).

Clasa a VI-a: Bocârnea C. Eugen (VI: 801, 2, 6, 7, 8); Braşoveanu D. Gheorghe (VII: 718, 9, 806); Mănescu Gh. Mihalache (VI: 802, 5); Pârşan C. Mihail (VI: 806, 7, 8); Puicea Em. Aristide (VI: 806, 8); Şerbănescu C. Corneliu (VI: 802, 3, 6); Vişan D. Mihai (VI: 806, 7, 8, 9, 10).

Clasa a VII-a: Cerbulescu A. Mircea (VII: 719, 20); Cleanoveanu N. Alexandru (VII: 719); Mănescu Gh. Nicolae (VII: 719, 20, 6, 30, 1).

Dela un anonim (VI: 807, 8, VII: 731).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1944

Clasa a III-a. *Exerc. 246.* Se dă un triunghiu dreptunghiu BAC ($\hat{A} = 90^0$) şi se proiectează piciorul medianei $\overline{AO}$ în M şi N respectiv pe catetele AB şi AC. 1°. Cunoscând lungimile $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, să se calculeze lungimea segmentului MN. 2°. Să se arate, că dreptele CM şi BN se taie pe AO. 3°. Să se calculeze lungimile CM şi BN.

O. N. Ţ.

III. 247. Se dă triunghiul dreptunghiu BAC ($\hat{A} = 90^0$) şi se proiectează piciorul înălţimii AH în M şi N respectiv pe catetele AB şi AC. Să se calculeze segmentul MN cunoscând lungimile $\overline{AB}$ şi AC.

O. N. Ţ.

III. 248. Intr'un triunghiu dreptunghiu BAC ($\hat{A} = 90^0$) se proiectează piciorul bisectoarei AI în M şi N respectiv pe catetele AB şi AC. Să se calculeze segmentul MN cunoscând lungimile AB şi AC.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 683.* Să se arate, că, dacă *a, b, c* sunt măsurile ipotenuzei şi celor două catete ale unui triunghiu dreptunghiu, există egalitatea

$$\frac{(a-b)^3+c^3}{c(a-b)^2+(a+b)c^2} = \frac{c(a+b)^2+(a-b)c^2}{(a+b)^3+c^3}.$$

I. I. S.

IV. 684. Să se verifice identitatea

$$\frac{a}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{1-a}} + \frac{\frac{1}{1-a}}{a} = 3.$$

C. I. Ţ.

IV. 685. Să se arate, că

$$\frac{\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\left(\frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}+\frac{b-\frac{1}{a}}{b+\frac{1}{b}}\right)}{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}=2\left[\frac{ab-\frac{1}{ab}+2\cdot\frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}}+2\frac{b-\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{b}}}{4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}\right]^2,$$

oricare ar fi a şi b.

I. I. S.

IV. 686. Se dă un triunghiu ABC. Prin punctul A se duce un plan P perpendicular pe dreapta BC, prin B un plan R perpendicular pe AC, iar prin C un plan S perpendicular pe AB. Să se arate, că planele P, R, S trec prin aceeaşi dreaptă.

O. N. T.

Clasa a V-a. *Exerc. 810.* Să se arate, că

$$n^2(m-p)^4-p^2(m-n)^4-n^2p^2(n-p)(2m-n-p)-$$
$$-m^2(n-p)[m^2(n+p)+2pn(n+p)-6mnp]=$$
$$=2mnp(m-n)(m-p)(n-p).$$

N. M.

V. 811. Să se descompună în factori de gradul întâi expresia

$$E\equiv n(n-2m)(m-p)^4-p(p-2m)(m-n)^4+m^4(n-p)(2m-n-p)+$$
$$-np(n-p)[6m^3-6m^2(n+p)+2m(n+p)^2-np(n+p)].$$

N. M.

V. 812. Să se pună sub formă de patrat perfect expresia

$$E\equiv(a^2-1)^2x^2y^2+a[a(x^2+y^2)-2xy][x^2+y^2-2axy].$$

Să se determine apoi a astfel ca E să fie puterea a patra a unui polinom.

G. D. S.

V. 813. Fie M un punct pe cercul de diametru $\overline{AB}$ și N intersecția cercului cu înălțimea MM' a triunghiului AMB. Dacă P este piciorul uneia din bisectoarele unghiului AMB, atunci NP trece prin o extremitate a diametrului cercului AMB, perpendicular pe AB.

GH. B.

V. 814. Să se construiască un paralelogram ABCD, fiind cunoscute unghiul A, diagonala AC și perimetrul.

V. GH.

Clasa a VI-a. *Exerc. 818.* Să se deducă egalitatea

$$\frac{2\,\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha} = \left[\frac{2+\mathrm{tg}2\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha}\right]^2.$$

I. I. S.

VI. 819. Să se rezolve ecuația

$$2\sin x\cos x - 3\cos x - (\sin x + \cos x)(2\cos x - 3) = 0.$$

I. I. S.

VI. 820. Să se demonstreze identitățile

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} - 2\sum_1^m \cos 2mx \equiv 1$$

$$\frac{\cos(2m+1)x}{\sin x} + 2\sum_1^m \sin 2mx \equiv \mathrm{cotg}x.$$

V. GH.

VI. 821. Să se calculeze unghiurile u, cuprinse între 0^0 și 360^0, date de formula

$$\mathrm{tg}^4 5u = \sqrt[3]{\frac{1-\mathrm{cotg}^2 a}{1+\mathrm{cotg}^2 a}},$$

unde $a = 124^0 20' 35''$.

V. GH.

VI. 822. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând un unghiu, perimetrul și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 823. Se dă un plan (P), o dreaptă (D) în acest plan și un punct A exterior planului. Din A ducem o perpendiculară AB pe dreapta (D), iar în B și în planul (P) perpendiculara $\overline{BC}$ pe (D), egală cu $\overline{AB}$. Din C ducem o perpendiculară $\overline{CC'}$ pe AB în planul ABC, iar din C' o paralelă C'A' la AC întâlnind pe BC în A'.

Să se arate, că AA' este perpendiculară pe planul (P).

O. N. Ț.

Clasa a VII-a. *Exerc. 739.* Să se rezolve sistemul

$$x + (b-c)(c-a)\,y + (a-b)^2 z = 0$$
$$x + (c-a)(a-b)\,y + (b-c)^2 z = 0$$
$$x + (a-b)(b-c)\,y + (c-a)^2 z = 0.$$

I. I. S.

VII. 740. Să se rezolve sistemul

$$\left|\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ (a+1)^5 x + (a-1)^5 y = 1 \\ (a+1)^5 y + (a-1)^5 z = -1, \end{array}\right.$$

a fiind un parametru. Discuție.

O. N. Ț.

VII. 741. Să se rezolve sistemul

$$\left|\begin{array}{l} x - y + z - t = 0 \\ x\cos^6\alpha + y\sin^6\alpha = \dfrac{1}{2} \\ y\cos^6\alpha + z\sin^6\alpha = -\dfrac{1}{2} \\ z\cos^6\alpha + t\sin^6\alpha = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right.$$

a fiind un parametru. Discuție.

O. N. Ț.

VII. 742. Să se determine α astfel ca sistemul de ecuaţii

$$\left|\begin{aligned}
C_{n-2}^{p-1}x_1 + C_{n-3}^{p-1}x_2 + C_{n-4}^{p-1}x_3 + C_{n-3}^{p-1}x_4 &= 1\\
C_{n-1}^{p-1}x_1 + C_{n-4}^{p-1}x_2 + C_{n-2}^{p-1}x_3 + C_{n-2}^{p-1}x_4 + C_{n-1}^{p-1}x_5 &= 0\\
C_{n-2}^{p}x_1 + C_{n-2}^{p-1}x_2 + C_{n-1}^{p-1}x_3 + C_{n-3}^{p}x_4 &= \alpha^3\\
C_{n-1}^{p-1}x_2 + C_{n-3}^{p-1}x_3 + C_{n-1}^{p-1}x_4 &= \alpha^4\\
C_{n-4}^{p-1}x_2 + C_{n-4}^{p}x_3 + C_{n-1}^{p}x_5 &= -1\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= \frac{p!(n-p)!}{n!}\cdot\alpha^6
\end{aligned}\right.$$

să fie compatibil oricare ar fi $n > p > 4$.

O. N. Ţ.

VII. 742. Se dă funcţia

$$y = \sqrt[3]{ax^3 + 3ax + b}\,.$$

Să se arate, că

$$y'(x^2+1) = ay^2 + (a+y')(x^2 - y^2 + 1).$$

I. I. S.

VII. 743. Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

C. I. Ţ.

VII. 744. Să se arate, că, dacă

$$x + y = a,$$

atunci

$$xy < \frac{a^2}{4}.$$

GH. B.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 660.* Faţă cu sistemul de axe ortogonale OX, OY se consideră punctele A $(0, a)$ şi B $(\lambda, 0)$. In mijlocul C al segmentului AB ridicăm o perpendiculară care taie pe OX în D. Să se afle, când λ variază, locul mijlocului E al segmentului $\overline{CD}$.

Să se dea şi o soluţie prin geometria elementară.

V. Gh.

VIII. 661. Se dă unghiul fix AOB, constant. Fie C un punct mobil pe OA. Se consideră semicercul cu centrul în C şi tangent la OB. Să se afle locul geometric al mijlocului acestui semicerc.

V. Gh.

VIII. 662. Se dau două cercuri (C_1) şi (C_2), apoi o dreaptă D. Să se determine punctul M de unde tangentele duse la cercurile (C_1) şi (C_2) să fie cât distanţa dela M la dreapta D.

G. D. S.

VIII. 663. Se dă un punct fix A pe axa OX şi o dreaptă (D). Prin A se duce o dreaptă variabilă, care întâlneşte pe (D) în M şi axa OY în N. Să se găsească locul geometric al intersecţiei perpendicularei pe OY în N cu dreapta OM.

G. D. S.

VIII. 664. Se dă cercul

$$x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

O dreaptă, care trece prin origine şi face un unghiu de 60^0 cu axa OX, taie cercul în M. Să se arate, că tangenta în M la cerc taie axa OX în simetricul centrului cercului faţă de origine.

N. M.

VIII. 665. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare a unghiului axelor dreptunghiulare XOY şi punctele fixe A (3, 1); B (— 1, 2). Dreapta MA taie axa OX în P, iar dreapta MB taie axa OY în Q. Să se arate, că dreapta PQ trece prin un punct fix şi să se determine coordonatele acestui punct fix.

G. D. S.

VIII. 666. Un triunghiu dreptunghiu BAC are ipotenuza BC constantă, paralelă cu o axă (D) şi aşezată la distanţa BB′ de axa (D), egală cu proiecţia catetei AB pe BC.

Cât de mare trebue luată proiecţia catetei AB pe BC, pentru ca volumul înnăscut de aria BAC în jurul axei (D) să fie egal cu $\frac{\pi a^3}{12}$.

O. N. Ţ.

VIII. 667. Se consideră un con circular drept cu raza bazei dată, iar generatoarea nedeterminată şi sfera înscrisă în acest con. Să se determine generatoarea conului, astfel încât diferenţa între volumul conului şi volumul sferei să fie egală cu volumul cilindrului având aceeaşi bază cu conul, iar înălţimea cât $\frac{2}{3}$ din latura triunghiului echilateral înscris în cercul de bază.

Să se arate, că problema are o singură soluţie.

O. N. Ţ.

Exerciţii Generale. *Exerc. 583.* Dacă r_i reprezintă rădăcinile primitive ale numărului p, unde $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci avem

$$\sum_1^n r_i^{\frac{p-1}{2}} = \mathcal{M}p - n \quad \text{şi} \quad \prod_1^n r_i^{\frac{p-1}{2}} = \mathcal{M}p + (-1)^n.$$

I. L.

E. G. 584. Indicatorul unui număr poate fi direct proporţional cu indicatorul altui număr?

I. L.

E. G. 585. Să se arate, că puterea n^a a indicatorului unui număr este inferioară indicatorului puterii a n^a a acelui număr.

I. L.

E. G. 586. Dacă $\varphi_x(y)$ reprezintă indicatorul de ordinul x al lui y, atunci avem

$$\varphi_{n-1}(N) > 2\varphi_n(N).$$

I. L.

E. G. 587. Să se arate, că

$$\left[\frac{2^{\alpha}!}{2^{\alpha-1}.2^{2^{\alpha}}}\right]^2 - 1 = \mathcal{M}2^{\alpha}.$$

I. L.

E. G. 588. Dacă $\pi(i)$ reprezintă produsul numerelor prime cu i şi mai mici ca el, atunci avem

$$[\pi(A.N)]^2 - [\pi(B.N)]^2 = \mathcal{M}N.$$

I. L.

E. G. 589. Să se arate, că

$$\sum_{i=1}^{N} [\pi(i.N)]^2 = \mathcal{M}N,$$

unde $\pi(i)$ reprezintă produşul numerelor prime cu i şi mai mici ca el.

I. L.

E. G. 590. Să se arate, că, dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă primele n numere prime, atunci se poate găsi o serie de valori pentru i, în funcţie de n, pentru care să avem

$$p_n > i.n.$$

I. L.

E. G. 591. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ reprezintă primele n numere prime şi dacă avem $p_n > i.n$, atunci vom avea şi

$$p_{n+k} \geqq i.n + 2k.$$

I. L.

E. G. 592. Să se arate, că, oricare ar fi α întreg şi pozitiv, avem

$$\frac{2^{\alpha-1}!}{3^{\alpha-1}!} \cdot \frac{2^{2^{\alpha-1}}}{3^{2^{\alpha-1}}} > \frac{2^{\alpha}!}{3^{\alpha}!}.$$

I. L.

INFORMAȚIUNI

Societatea « *Gazeta Matematică* » a instituit, cu începere din anul al XLIX-lea de apariție a revistei « *Gazeta Matematică* », o bursă anuală care poartă numele de « *Bursa Gh. Em. Filipescu* », care se acordă unui student al Politehnicei din București, în condițiile impuse de regulamentul acestei burse.

In ședința de la 9 Decembrie 1943, bursa pentru anul acesta a fost acordată D-lui C. A. ȘEIBULESCU căruia i s'a și achitat bursa pe primele două luni chiar în cursul ședinței.

Societatea mai acordă și alte burse și premii, care se dau în conformitate cu regulamentele, publicate în broșura

REGULAMENTELE PREMIILOR ȘI BURSELOR SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ"

ce se poate procura dela Societate contra costului de 60 lei plus porto.

INSTRUCȚIUNI

a) Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoie de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului se vor construi îngrijit, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceeași foaie.

b) Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul astfel cum e publicat în revistă, cu inițialele propunătorului, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvitorului în ordinea următoare:

Numele de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, urmat de clasa și școala pe care o urmează.

c) Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

d) Soluțiile se primesc timp de 3 luni dela propunerea exercițiului, numai dela abonații „Suplimentului cu Exerciții" al Gazetei Matematice, pe adresa Casa Gazeta Matematică, Calea Griviței 158, București 2.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 21.971

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 5 1 FEBRUARIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAŢIUNII"
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEM
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELE

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 5 — 1 FEBRUARIE 1944

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL DE MECANICĂ

Şi anul acesta ca şi în anii precedenţi, pentru încurajarea studiului Mecanicei, se institue un Concurs de Mecanică pentru abonaţii *Suplimentului Gazetei Matematice.*

Concurenţii vor trimite până cel mai târziu la 15 Mai soluţiile problemelor publicate în numerele din Februarie, Martie, Aprilie ale Suplimentului, cu indicaţia pentru Concursul de Mecanică.

Se oferă 2 premii: Premiul I de 2.000 lei, Pemiul II de 1.000 lei.

Rezultatul concursului se va publica în numărul din Iunie al Suplimentului.

Pentru numărul acesta se propun următoarele exerciţii pentru concurs:

1. O persoană aruncă o piatră vertical în sus cu viteza iniţială v_0, dela o înălţime h deasupra solului. Se întreabă după cât timp şi cu ce viteză va ajunge piatra la sol.

2. Pe o pistă circulară aleargă o persoană A pornind din M cu o viteză constantă v_A. O a 2-a persoană B aleargă pe diametrul MN pornind din M tot cu v_A. Ce acceleraţie trebue el să aibă pentru a prinde pe A în N la extremitatea diametrului? Să se traseze curbele spaţiului, vitezei şi acceleraţiei în funcţie de timp pentru cele 2 persoane.

3. Se dă un plan AB înclinat cu θ faţă de orizontală. Din punctul cel mai de jos A, se lansează în sus pe plan un proiectil cu viteză iniţială v_0. Din punctul cel mai de sus B, se lasă să lunece pe plan un al 2-lea proiectil fără viteză iniţială. Ele se întâlnesc în punctul M în care proiectilul plecat din B a atins viteza $\frac{v_0}{2}$. Să se determine distanţa AB, timpul parcurs până la ciocnire şi viteza punctului pornind din A când a ajuns în M.

4. O lumânare de înălţime h e situată pe o masă orizontală. Pe aceeaşi masă e bătut un cuiu vertical de înălţime $\frac{h}{4}$. Se depărtează lumânarea de cuiu târînd-o pe masă cu o viteză constantă v_0. Cu ce viteză se deplasează pe masă extremitatea umbrei cuiului?

5. Pe roata unei mori cade apă dela 2 m înălţime. Din cauza frecărilor se pierde 20% din putere. Roata trebue să dea 15 cai. Câtă cantitate de apă trebue să sosească la roată? Să se transforme puterea roţii în alte unităţi de putere.

6. Pe 2 piste circulare concentrice, una de diametru AMNB=2R şi cealaltă de diametru MN = R, merg 2 persoane. Cea de pe cercul exterior merge într'un sens cu viteză iniţială v_0 şi acceleraţie tangenţială γ. Cea de pe cercul interior merge în sens invers cu viteză constantă $2v_0$. Prima porneşte din A, cea de a 2-a din M. Să se determine acceleraţia γ, astfel încât prima persoană să fie în B, când a 2-a e în N. Să se determine acceleraţia totală ca mărime şi direcţie a celor 2 persoane în N şi B.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 552. Ce condiţie trebue să îndeplinească* n *pentru ca să avem:*

$$a^{m\varphi(p)} - (n \,.\, p)^m - 1 = \mathcal{M}\,(m \,.\, n \,.\, p)$$

unde $\varphi(p)$ *este indicatorul lui* p.

I. L.

După teorema lui FERMAT generalizată de EULER avem:

$$a^{\varphi(p)} - 1 = \mathcal{M}p = n \,.\, p$$

dacă a nu este divizibil cu p.

Ridicând acum relaţia:

$$a^{\varphi(p)} = n \,.\, p + 1$$

la puterea m avem:

$$a^{m \,\cdot\, \varphi(p)} = (n \,.\, p + 1)^m = 1 + m \,.\, n \,.\, p \,.\, Q + (n \,.\, p)^m$$

unde:

$$Q = 1 + \frac{m-1}{2!}\, n \,.\, p + \ldots + \frac{m-1}{2!}\,(n \,.\, p)^{m-3} + (n \,.\, p)^{m-2}.$$

Deci, dacă n nu este divizibil cu a, atunci avem:

$$a^{m \cdot \varphi(p)} - (n \cdot p)^m - 1 = m \cdot n \cdot p = \mathcal{M}(m \cdot n \cdot p).$$

E. G. 553. In ce caz numerele a *şi* b *satisfac relaţia:*

$$[\sigma(a)]^{2\sigma(b)} + [\sigma(b)]^{2\sigma(a)} = \mathcal{M}(a \cdot b) + 1$$

unde $\sigma(i)$ *reprezintă suma numerelor prime cu* i *şi mai mici ca* i. (Enunţ rectificat).

I. L.

Ştim că:

$$\sigma(i) = \frac{1}{2} i \varphi(i).$$

De asemenea dacă x nu este divizibil cu y, atunci după teorema lui FERMAT generalizată de EULER avem:

$$[\sigma(x)]^{\varphi(y)} - 1 = \mathcal{M}y.$$

Deci dacă a nu este divizibil cu b, atunci diferenţa din membrul I este: $\mathcal{M}a + 1$ şi $\mathcal{M}b + 1$, deci va fi în acelaşi timp $\mathcal{M}(a \cdot b) + 1$.

E. G. 555. Dacă cel mai mic factor prim al unui număr întrece rădăcina n^{-a} *a acelui număr, atunci numărul are cel mult* $(n - 1)$ *factori primi.*

I. L.

Fie: $N = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \ldots$ unde $a < b < c \ldots$ sunt în număr de x, atunci dacă $a^\alpha > \sqrt[n]{N}$, factorii pe cari îi mai are vor fi:

$$b^\beta > \sqrt[n]{N} \quad ; \quad c^\gamma > \sqrt[n]{N}; \ldots$$

Prin urmare:

$$\underbrace{b^\beta \cdot c^\gamma \ldots}_{x-1} > (\sqrt[n]{N})^{x-1}.$$

Inmulţind cu a^α, avem: $N > (\sqrt[n]{N})^x$, deci: $x < n$ sau $x - 1 < n - 1$, adică numărul factorilor primi diferiţi de a vor fi $(n - 2)$.

E. G. 556. Să se găsească cele mai mici șase numere consecutive, printre care să nu fie nici unul prim.

I. L.

Fie: $2a+2$, $2a+3$, $2a+4$, $2a+5$, $2a+6$, $2a+7$ cele șase numere. Pentru ca numerele impare să nu fie prime, trebue să avem: $a \geqslant 3.5.7 = 105$.

Numerele vor fi deci: 212, 213, 214, 215, 216, 217.

E. G. 557. Să se arate că orice număr de forma n^4+4 *nu poate să fie prim.*

I. L.

Avem:

$$n^4+4 = (n^2+2)^2 - 4n^2 = (n^2+2-2n)(n^2+2+2n).$$

E. G. 559. Dacă a, b, c, d *sunt numere prime mai mari ca* 5, *atunci ecuația:*

$$b^2+c^2+d^2 = 3a^2$$

are soluții.

I. L.

Foarte multe numere prime pot fi de forma: $\mathcal{M}6 \pm 1$, deci ecuația poate avea forma:

$$\mathcal{M}6 + 3 = 3.(\mathcal{M}6+1)$$

care este posibilă.

E. G. 560. Dacă $p_1, p_2, \ldots p_n$ *reprezintă primele* n *numere prime consecutive, atunci numărul prim imediat superior lui* p_n *este mai mare ca* $(n+2)$.

I. L.

Avem:

$$n \leqslant p_n \leqslant 2n-1,$$

deci

$$n+2 \leqslant p_{n+1} \leqslant 2n+1.$$

E. G. 561. Să se arate că într'un șir de $(n+1)$ *numere consecutive, începând cu* $n(n+1)$, *se găsește cel puțin un număr prim.*

I. L.

Rezultă că între $n(n+1)$ și $(n+1)^2$ avem cel puțin un număr prim.

Ştim că numărul numerelor prime din intervalul dela A la B este dat de expresia:

$$I_{A \to B}[2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{B})] \sim I_{A \to B}[(\sqrt{B})]$$

unde $(\sqrt{B})$ reprezintă numărul prim imediat inferior lui $(\sqrt{B})$, în paranteză avem produsul tuturor numerelor prime până la $(\sqrt{B})$, iar $I_x(y)$ înseamnă numărul numerelor prime cu y din şirul de numere, până la x, iar $A \geqslant (\sqrt{B})$. Dacă $A < (\sqrt{B})$ vom ţine seamă şi de numerele prime dintre A şi $(\sqrt{B})$.

Observăm că

$$I_{A \to B}[(\sqrt{B})] = I_B[(\sqrt{B})] - I_A[(\sqrt{B})].$$

Dar: $I_B[(\sqrt{B})] = I_A[(\sqrt{B})] + I_{B-A}[(\sqrt{B})] - \varepsilon$

unde $0 \leqslant \varepsilon < 2^m$ unde m este numărul factorilor primi din paranteză.

Avem deci:

$$I_{A \to B}[(\sqrt{B})] \leqslant I_{B-A}[(\sqrt{B})].$$

Deci, pentru ca între A şi B să avem un singur număr prim, ar trebui să avem relaţia:

$$I_{A \to B}[(\sqrt{B})] = 1$$

iar pentru ca să avem „cel puţin" un număr prim, ar trebui să avem:

$$I_{B-A}[(\sqrt{B})] \geqslant 1.$$

Aşa dar din şirul natural al primelor (B—A) numere vor fi eliminate toate cele cuprinse în $[(\sqrt{B})]$ şi ne mai rămâne şirul:

$$[(\sqrt{B})+1] \quad , \quad [(\sqrt{B})+2] \quad , \quad \ldots (B-A)$$

în care va trebui să avem cel puţin un număr prim. Deci va trebui să avem:

$$B-A \geqslant (\sqrt{B}),$$

ceea ce la limită, adică pentru egalitate, ne dă:

$$A = n(n+1) \quad \text{şi} \quad B = (n+1)^2.$$

Verificarea ne arată că:

$$I_{n(n+1) \to (n+1)^2}(2.3.5.7.11 \ldots p_{n+1})$$
$$= I_{n+1}(2.3.5.7.11 \ldots p_{n+1}) = 1$$

unde p_{n+1}, este numărul prim imediat inferior lui $(n+1)$.

I. L.

Până la 1 Ianuarie 1944 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a V-a: Babuskov B. I. Magdalena (V: 800, 7); Păcurariu I. Doina (V: 795, 7, 800, 7), Stănijean Olimpia (V: 795, 800).

Clasa a VI-a: Ardelean I. Mioara (VI: 806, 7, 8); Jercan M. Aurelia (VI: 801, 2).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a VII-a: Schiopu R. Ioan (VII: 718, 9, 20, 3).

Liceul de fete Bacău.

Clasa a VIII-a particulară: Antonaș St. Otilia (VII: 644, 5, 6).

Liceul „Gh. Codreanu" Bârlad.

Clasa a VII-a: Manoliu Sp. Mihai (VII: 718, 9, 20, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 32, 4, 5, 6, E. G.: 573, 81).

Liceul de fete, Beiuș-Bihor.

Clasa a V-a: Ștefănescu Corina (V: 795, 8, 800, 7, VI: 804, E. G.: 557, 9).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș-Bihor.

Clasa a V-a: Chirilă A. Radu (V: 797, 807, 10).

Clasa a VI-a: Cosma C. Gavril (VI: 809, 10), Costea D. Florian (VI: 808, VII: 733), Moldovan I. Mircea (VI: 802, 4. 9, 10).

Clasa a VII-a: Hodișan Gh. Florin (VII: 719, 26, 30, 1, 8); Logofătu Tănase (VII: 719, 25, 6, 33, 4, 5, 8); Maliță A. Mircea (VII: 725, 8, 33, 4, 5, 6, 8).

Liceul „Sf. Vasile", Blaj.

Clasa a III-a: Oltean Gh. Gheorghe (III: 239).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Cazacu V. Vlad (VII: 733); Constantinescu N. Ilie (VII: 725, 6, 32, 6, VIII: 640, 2, E. G.: 556, 7); Cristache Gh. Avram (VII: 718, 9, 20, 1, 2, 3, 6, 7, 9, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 8, E. G.: 567).

Clasa a VII-a: Gafițeanu M. Alexandru (VIII: 645, 5, 6, 7).

Liceul „Dr. Ion Meşotă", Braşov

Clasa a V-a: Grancea V. Virgil (V: 807); Ignescu St. Ioan (V: 807).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a IV-a: Alexe Maria (IV: 676); Anghelescu Maria (IV: 676); Chivulescu Natalia (IV: 676); Stoenescu Maria (IV: 676, 82).

Clasa a V-a: Dumitrescu I. Aurelia (V: 796, 971, 98, 800, 1, 7); Dumitrescu Florica (V: 796, 807); Dumitrescu Gh. Maria-Simona (V: 796, 6, 8).

Clasa a VI-a: Calciu Maria (VI: 809); Halunga O. Crucița (VI: 807); Miuță Florica (VI: 809, 10).

Clasa a VII-a: Hagi-Paraschiv A. Liliana (VII: 725, 6, 30); Vasilescu M. Mariana (VII: 733, 4).

Clasa a VIII-a: Jitariu Florica (VIII: 645).

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Cristescu St. Cornelia (IV: 676).

Clasa a V-a: Minasian Hermina (V: 795).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Barbu Ana (IV: 676, 82).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a V-a: Eremia I. Mihail (V: 795, 7, 801, 7).

Clasa a VI-a: Barbaiani A. Mihai (VI: 802, 3, 4, 5, VII: 718, 20, VIII: 640, 2, E. G.: 555, 6, 7, 8), Diaconu C. Constantin (VI: 802, 3, 4, 5, 6, 7, 8), Leon A. Mihai (VIII: 640, 2, E. G.: 556, 7), Marinescu A. Mihai (VI: 802, 5).

Clasa a VII-a: Dumitrescu Valeriu (VII: 726).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Stoicescu P. Tudor (IV: 676, V: 800, 1, 2).

Clasa a V-a: Dumitrescu F. Sorin (V: 800, 3, 5, 9, VI: 803, 6, 13, 5, 6, VII: 718, 9, 26, E. G.: 557, 8, 77, 8, 80, 1).

Clasa a VII-a: Pop V. Mircea (VII: 718, 9, 20, 1, 3); Soare V. Mircea (VII: 721, 2, 5, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Temelcu N. Cezar (VII: 726, 32).

Clasa a VIII-a: Timotin Al. Alexandru (VIII: 640, 1, 3, 5, 8, . G.: 555).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Mărgăritescu C. Mihai (VI: 809, 10, 1, 3).

Clasa a VII-a: Ieşan Alexandru (VII: 732, 3, 6, 7, 8, E. G.: 557, 67, 77, 8); Muntz M. Eduard (VII: 718, 9, 20, VIII: 639, 40, 2, 3, 5, 7, E. G.: 558, 9).

Clasa a VIII-a: Antonescu D. Eugen (VIII: 639, 40, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 51, 5, 7, 8, 9); Dumitriu D. Stavran (VIII: 639, 42), Popescu N. Ştefan (639, 40, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 30).

Liceul „Sf. Gheorghe" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Pitiş L. N. Armand (VII: 726, 8, 33, 4, 5, 8, VIII: 644, 5, E. G.: 581).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa a V-a: Chiriţă I. Ioan (V: 795, 7, 800).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Ene Al. Ioan (VIII: 645, 8, 55, 7).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Letia L. Valentin (VII: 718, 9, 20, 9).

Gimnaziul „I. Eliade Rădulescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Coraciu N. Iulian (IV: 676).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a V-a: Doneaud E. André (V: 805, 7, 8).

Clasa a VI-a: Ardare M. Nicolae (VI: 812).

Clasa a VII-a: Codreanu M. Nestor (VII: 719, 3, 4), Mateescu G. Arghir (VII: 725).

Clasa a VIII-a: Girescu N. Aurel (VIII: 639, 40, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 50, 1); Mamesian Dragoş (VIII: 639, 40, 1, 2, 5, 6, 8, 9).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Prassa Gh. Constantin (VIII: 639, 40, 2, 3).

Particulari-Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Burileanu O. Sanda (VIII: 645, 8, 9, 53, 5); Stoicescu Viorica (VIII: 644, 5, 6, 9, 55).

Liceul Internat, Buftea.

Clasa a VI-a: Bădulescu I. Cezar (VI: 802, 5).

Liceul „B. P. Hasdeu", Buzău.

Clasa a VIII-a: Petculescu Mircea (VIII: 639, 40, 2, 3).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi-Ialomiţa.

Clasa a IV-a: Beroniade C. Vicenţiu (V: 797).
Clasa a VI-a: Coţofană M. Alexandru (VI: 807, 13).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa a VI-a: Stroescu I. Florea (VI: 806, 7).
Clasa a VII-a: Barbu A. Ioan (VII: 728, 33, 4, 8, VIII: 639, 40, 2, E. G.: 558); Grigore A. Gheorghe (VII: 725, 7, 8, 32, 3, 4, VIII: 639, 40, 1, 2, 50); Streianu I. Nelu (VII: 733, E. G.: 565, 7, 8, 9).

Liceul „Traian Doda", Caransebeş.

Clasa a VI-a: Stan O. Petru (VI: 813, 7).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare", Cernăuţi.

Clasa a IV-a: Damian V. Cosma (E. G.: 558).
Clasa a VII-a: Diliski M. Cazimir (E. G.: 558).
Clasa a VIII-a: Balaş Ovidiu (VIII: 644, 5); Cândea Silviu (VIII: 644, 5, 8, 9); Gaius Tănase (VIII: 644, 5); Popescu Nicolae (VIII: 644, 5, 8, 9); Soare Mircea (644, 5, 8); Spirescu Nicolae (VIII: 644, 5, 9), Staicu Constantin (VIII: 644, 5, 6, 9, E. G.: 558); Zuzuleac Nicolae (VIII: 644, 5).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I", Chişinău.

Clasa a VI-a: Bişir P. Dumitru (V: 795, 6, 7, 8, 800, 1, 2); Panait Ionel (V: 795, 800, 1, 2); Parola N. Alexandru (V: 795); Sardea N. Alexandru (V: 801, 2).
Clasa a VI-a: Popovici C. Horaţiu (VI: 801, 2, 4, 5, 9, 10); Sălcuţeanu Gheorghe (VI: 801, 2, 4, 5, 9, 11).
Clasa a VII-a: Gogoaşe Sever (VII: 718, 26); Olteanu Mircea (VII: 726).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa a IV-a: Cusuţă H. Alexandru (V: 796, 7, VI: 802, 4, 5).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a IV-a: Georgescu Gabriela (IV: 680).
Clasa a V-a: Papanaum T. Domnica (V: 680, 7).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Dumitrescu A. Paul (V: 795, 7, 801, 7); Nicolae M. George (V: 795, 6, 8, VI: 801, 2, 4, 5, 8, VII: 718, 9, E. G.: 557).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa a IV-a: Alexandrescu Gh. Ion (IV: 671); Gămănescu P. H. Ştefan (IV: 671); Leoveanu M. Constantin (IV: 671): Nicolicioiu St. Marius (IV: 671, 2, 7); Savin C. Vasile (IV: 671).

Clasa a VI-a: Popescu C. Dumitru (VI: 806, 7, 8).

Clasa a VIII-a: Burnea Th. Dumitru (VII: 645, 8, 9); Constantinescu P. Radu (VIII: 645, 8, 9); Negruş Bucur (VIII: 645, 9); Păunescu N. Aurelian (VIII: 645, 9); Şercăianu O. Alexandru (VIII: 645); Udrea Carp Ilie (VIII: 639, 40, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 5, 6, 7).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa a IV-a: Ţibichi D. Mihai (IV: 676, 7).

Clasa a IV-a: Arbănaş N. Mircea (VI: 805, 7).

Clasa a VII-a: Balaban S. Adrian (VII: 724, 30), Chelaru I. Mihai (VII: 725, 6, 30); Popa Eugen (E. G.: 558); Verdeş I. Ananie (VII: 719, 5, 30, 1).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa a IV-a: Huideş Alexandru (E. G.: 558); Mardare M. (E. G.: 558); Tofan Alex. (E. G.: 558).

Clasa a VI-a: Bârzescu Mircea (VI: 809, 10, 1, E. G.: 557, 8); Ciureanu Gh. Constantin (E. G.: 557, 8); Nache D. Dumitru (E. G.: 557, 8).

Clasa a VIII-a: Andronache Ioan (VIII: 645, EG.: 557, 8).

Liceul „Petru Rareş", Piatra-Neamţ.

Clasa a IV-a: Niţă M. Mihai (VI: 723, 802).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa a IV-a: Constantinescu D. Mihai (VI: 806, 7, 12, 3, 4, VII: 719, 21, 5, 7, 9, 30, 1, 4, 5, 6, VIII: 639, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 50, 1, 7, E. G.: 557, 68, 9, 73, 7, 8, 9, 80, 1).

Clasa a VII-a: Buzatu D. Corneliu (VII: 730).

Clasa a VIII-a: Vintilescu A. George (VIII: 636, 45, 6, 8, 9, 50, 1).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a: Badea Mihai (VI: 810).

Clasa a VII-a: Columbeanu D. Petre (VII: 725, 33, 7, E. G.: 577), Marinescu Marinel (VII: 727, 32, 3, 4, 5, 6, 9).

Liceul de fete Slatina-Olt.

Clasa a VII-a: Zeveleanu Gh. Constanţa (VII: 726, 30, 1, 3, 4, 5, 6)

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VIII-a: GÂȚĂ GH. GHEORGHE (VIII: 636, 7, 8, 41, 4, 5, 8, 9, 57, 8, E. G.: 573); GIURCONIU GR. MIHAIL (VIII: 644, 5, 8, 9, 57, 8, E. G.: 557, 8).

Gimnaziul „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa a III-a: AVĂDANI B. VASILE (III: 237, 9).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timișoara.

Clasa a VII-a: TINCU C. CONSTANTIN (VII: 725, 30, 2, 6, 44, E. G.: 557, 8, 62, 5, 76, 7, 80, 1, 6, 8, 9, 92).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa a III-a: BILCEA N. DAIA (III: 240, 2, E. G.: 558).

Clasa a V-a: CHIRAN N. PAUL (V: 796, 7, 800, 7); ORHA FLORIAN IOAN (V: 797); PENESCU GH. MARIN (V: 796, 7), PUȘCAȘ D. EMIL (V: 795, 6, 7); TRIPȘA IOSIF (V: 795, 7, 801, 2, 4); STANCIU V. PETRE (V: 796, 803).

Clasa a VI-a: COCHELA D. LIVIUS (VI: 803, E. G.: 558); FABIMOV I. (VII: 806, 7); POPESCU C. O. (E. G.: 556); ROGOZ I. (E. G.: 556, 60, 8, 9); STOIA N. IORGU (E. G.: 558); STREJA N. I. (VI: 813); VRÂNCEANU GH. GHEORGHE (VI: 812, 3, 4, 5, 6, 7, VII: 725, 8, 34, 5, 6, E. G.: 557, 61, 2, 4, 9, 72, 3, 6, 7, 8, 9, 80, 1).

Clasa a VII-a: APOSTOLIU GH. DUMITRU (VII: 733); BANCU GL. EMILIAN (VII: 725, 30, 1, 3, 7); CHIRIAC N. VASILE (VII: 730, 1, 2, 3, 4, 8); CONSTANTINESCU A. CONSTANTIN (VII: 725, 8); GRIGORESCU I. IOAN (VII: 725, 6); ISTRATI IOAN (VII: 730, 1, 4, 5); NEDELCU ULPIUS (VII: 725, 30, 1, 3, 5, 6, 7, 8); OPREA D. NIFON (VII: 725); PAVICA VICTOR (VII: 725, 8, 3, 4); SOROP PETRE (VII: 725); STAN AUREL (VII: 730, 1, 3, 7, 8); ȘTEFĂNESCU GEORGE (VII: 725, 30, 1); ȘTEFĂNESCU B. ȘTEFAN (VII: 730); STRATI P. IOAN (VII: 725, 6); VINEȘ COMAN (VII: 725).

Clasa a VIII-a: CĂNIȚĂ IOAN (VIII: 639, 40, 2, 3, 5).

Liceul „Regele Ferdinand I", Turda.

Clasa a VI-a: SEBESY A. ADAM (VI: 801, 3).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a VII-a: MARTIN D. CONSTANTIN (VII: 718, 9, 20, 3).

Liceul de fete, Turnu-Severin.

Clasa a VII-a: FIROIU I. MARIA (VII: 730, 1).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a III-a: Barborică Gh. Corneliu (III: 239), Hoancă S. Octavian (III: 239); Jitea D. Dumitru (III: 241); Sgândăr Sebastian (III: 239).

Clasa a IV-a: Tunsoiu M. Dumitru (IV: 676, 80 1, V: 805); Ţurai Gh. Constantin (IV: 676, 80, 1, V: 805, 7).

Clasa a V-a: Călugăru T. Dumitru (V: 807, E. G.: 556), Manasia C. Mihai (V: 798, 800, 1, 2, 7, 8); Popa D. Iosif (V; 805).

Clasa a VI-a: Aldescu T. Marius (VI: 806, 7, 8); Bocârnea C. Eugen (VI: 801, VII: 805, 9, 11, 2, E. G.: 558); Braşoveanu D. Gheorghe (VI: 801, VII: 723, 5, 6, 8, 803, 6, 8, 15); Cămuescu C. Constantin (VI: 801, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 4, 5, VII: 718, 19); Ionescu P. Aurel (VI: 801, 2, 3, 4, 5, 7, 8); Mema T. Teodor (VI: 801, 2, 6, 7); Nicolicioiu L. Ioan (VI: 804, 6, 7, 8, 11); Pârşan G. M. (VI: 801).

Clasa a VII-a: Boldea D. Constantin (VII: 726, 32, VIII: 645); Meilă I. Emil (VII: 730, 1).

Clasa a VIII-a: Dumitrescu Gh. Traian (VIII: 639, 40, 53, 5, E. G.: 558); Vlăduţ Şt. Constantin (VIII: 639, 40, 4, 5, 8, 53, 9).

Liceul din Vârşeţ (Banat), Secţia Română.

Clasa a VIII-a: Işfanu Teofil (VIII: 639, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 50, 1).

Elevi pregătiţi în particular.

Clasa a V-a: Ioaniţescu Gr. Pompiliu (V: 807).

Soluţiile nesemnate nu au fost luate în seamă.

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Mai 1944

Clasa a III-a. *Exerc. 249.* Fiind dat un triunghiu oarecare ABC, îl alunecăm în altă poziţie A'B'C', astfel că $\overline{B'C'}$ se află tot pe dreapta BC, iar distanţa dreptei A'B' la punctul B este $\overline{BQ} = a$ (a fiind o lungime dată).

Să se arate, că distanţa d a laturii A'C' la punctul B este dată de relaţia

$$d = \frac{\text{aria } ABB'A' + 2 \text{ aria } ABC}{\overline{AC}}.$$

O. N. Ţ.

III. 250. Fiind dat un triunghiu oarecare ABC, îl mutăm în plan în poziţia A'B'C', astfel că latura A'B' este paralelă cu AB, iar distanţele laturilor A'B' şi B'C' la vârful B sunt respectiv $\overline{BQ} = m$ şi $\overline{BP} = n$ (m şi n fiind două lungimi date). Să se arate, că distanţa d a laturii A'C' la vârful B este dat de relaţia

$$d = \frac{mc + na + ah_a}{b},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, AB, iar h_a înălţimea triunghiului dat corespunzătoare laturii BC.

O. N. Ţ.

III. 251. Intr'un patrulater dat ABCD, oarecare, se ia un punct M pe latura AB. Din M se duce o paralelă la diagonala AC, care taie pe BC în N; din N o paralelă la diagonala BD, care taie pe CD în P; din P o paralelă la CA, care taie pe AD în R. Să se arate, că patrulaterul MNPR este paralelogram.

In ce caz, acest paralelogram este *dreptunghiu*, *romb* sau *patrat?*

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 687.* Să se arate, că, dacă

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{m}{c} + ab} = \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{m}{a} + bc} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}{\frac{m}{b} + ac},$$

atunci $a = b = c$.

I. I. S.

IV. 688. Să se spună, când avem următoarele trei relaţii:

$$a = 1 - \frac{1}{c} \quad ; \quad 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{1-b} \quad ; \quad \frac{1}{1-a} = b.$$

C. I. Ţ.

IV. 689. Pe o dreaptă dată (D), să se găsească un punct M astfel ca diferenţa patratelor distanţelor lui la două puncte date A şi B să fie un număr dat a^2. Discuţie.

O. N. Ţ.

IV. 690. Se dau două perechi de puncte A, A', B, B' şi un plan (P). Să se găsească în planul (P) un punct M, astfel că diferenţa între patratele distanţelor lui la punctele A, A' să fie un număr dat a^2, iar diferenţa patratelor distanţelor lui la punctele B, B' să fie un număr dat b^2. Discuţie.

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 799*).* In trapezul ABCD (AB || CD), diagonala AC este egală cu latura CD. Fie I intersecţia diagonalelor şi M, N intersecţiile laturilor AD, BC cu paralela din I la AB. Să se arate că unghiul MAN este drept.

GH. B.

V. 815. Să se verifice că

$$\frac{\dfrac{a(a^2-b^2)}{2a-b}+\dfrac{b^2(2a-b)}{a-2b}}{\dfrac{a-2b}{2a-b}+\dfrac{3b}{a-2b}}=\frac{(a^3+b^3)^2}{(a+b)^4}.$$

N. M.

V. 816. Să se arate, că sistemele de ecuaţii

$$\text{(I)}\quad\begin{cases} x_1+x_2-x_5=a_1\\ x_2+x_3-x_1=a_2\\ x_3+x_4-x_2=a_3\\ x_4+x_5-x_3=a_4\\ x_5+x_1-x_4=a_5 \end{cases}\qquad \text{şi}\qquad \text{(II)}\quad\begin{cases} x_1+2x_4=a_1+a_3+a_4\\ x_2+2x_5=a_2+a_4+a_5\\ x_3+2x_1=a_3+a_5+a_1\\ x_4+2x_2=a_4+a_1+a_2\\ x_5+2x_3=a_5+a_2+a_3 \end{cases}$$

sunt echivalente (fără a le rezolva).

Să se găsească apoi sistemul de soluţii comune.

O. N. Ţ.

---

*) Inlocueşte exerciţiul V. 799 dela pag. 15 din acest an, căci în enunţul acelui exerciţiu s'a strecurat o omisiune şi greşeală de culegere care face ca enunţul exerciţiului să nu aibă sens.

V. 817. Se dă triunghiul ABC şi înălţimea AD. Se iau apoi segmentele $\overline{BE} = \overline{DC}$ şi $\overline{CF} = \overline{BD}$ perpendiculare respectiv pe AB şi AC.

1°. Să se arate, că triunghiul EAF este isoscel.

2°. Fie B' şi C' proiecţiile lui B şi C respectiv pe AE şi AF. Să se arate, că

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

G. D. S.

V. 818. Fie I, I_a centrul cercului înscris triunghiului ABC şi al celui exînscris din unghiul A. Dacă α, α' sunt proiecţiile punctelor I, I_a pe BC, iar A' este intersecţia lui AI cu cercul ABC, atunci $A\alpha$, $A'\alpha'$ taie cercul ABC în două puncte situate pe o paralelă la BC.

GH. B.

V. 819. Se dă cercul (I) tangent interior în T cercului (O). Se duce în (O) coarda AB, tangentă la cercul (I) în C. Dreapta AT taie pe (I) în D, iar tangenta în D la (I) taie pe AB în E. Să se arate, că

$$\overline{AE} \cdot \overline{AB} = \overline{AC}^2.$$

GH. B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 824.* Să se descompună în factori expresiile

$$E_1 \equiv 1 - \sin^4 x - \cos^4 x;\quad E_2 \equiv 1 - \sin^6 x - \cos^6 x;\quad E_3 \equiv 1 - \sin^8 x - \cos^8 x$$

$$E_1' \equiv 1 - \sin^3 x - \cos^3 x;\quad E_2' \equiv 1 - \sin^5 x - \cos^5 x;\quad E_3' \equiv 1 - \sin^7 x - \cos^7 x.$$

G. D. S.

VI. 825. Să se arate, că

$$\frac{\sin 2x + \sin 6x}{\sin 4x} = \frac{\cos 2x + \cos 6x}{\cos 4x}.$$

N. M.

VI. 826. Să se arate, că între unghiurile unui triunghiu avem relaţia

$$(\sin B + \cos B)(\cos C - \sin C) = \sin(B - C) - \cos A.$$

N. M.

VI. 827. Să se verifice, că între elementele unui triunghiu avem relaţia

$$r = \frac{a - b}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2} - \operatorname{cotg}\frac{B}{2}}.$$

N. M.

VI. 828. Se dă un plan (P), iar în acest plan un punct A şi un cerc (O). Pe perpendiculara în A la planul (P) se ia un punct fix M.

Să se găsească *cea mai mică* şi *cea mai mare* distanţă dela punctul M la cercul (O).

O. N. Ţ.

VI. 829. Intr'un plan (P) sunt date două drepte (D_1) şi (D_2) concurente în punctul O. Se consideră conurile circulare drepte (S_1) şi (S_2) având dreptele (D_1) şi (D_2) ca axe, iar unghiul de deschidere (al generatoarei cu axa) la ambele conuri mai mare decât jumătatea unghiului format de dreptele (D_1) şi (D_2).

Să se arate, că aceste două conuri (S_1) şi (S_2) se taie după două generatoare (G) şi (G').

1°. Planul (Q) al generatoarelor (G) şi (G') este perpendicular pe planul (P).

3°. Dacă unghiul de deschidere la acele două conuri (S_1) şi (S_2) este acelaşi, planul (Q) taie planul (P) după bisectoarea unghiului DOD'.

O. N. Ţ.

Clasa a VII-a. *Exerc. 745.* Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{n} (3i^2 + i + 1).$$

N. M.

VII. 746. Să se verifice, că

$$(x+a)^{11} - x^{11} - a^{11} = 11xy(a+x)(y^3 + a^2x^2y + a^3x^3),$$

unde $y = x^2 + ax + a^2$.

N. M.

VII. 747. Să se verifice identitatea

$$C_m^{n-1} = \frac{mn}{(m-n)(m-n+1)} \cdot C_{m-1}^{n}.$$

N. M.

VII. 748. Să se arate, că

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4b^3 & 2b^3 \\ 1 & 2a^3 & 4a^3 \\ 1 & b^3 & a^3 \end{vmatrix}.$$

N. M.

VII. 749. Să se rezolve sistemul

$$a^4x + ay + z = a^2$$
$$b^4x + by + z = b^2$$
$$c^4x + cy + z = c^2.$$

N. M.

VII. 750. Să se rezolve sistemul

$$x \sin a + y \cos a + z = 0$$
$$x \sin b + y \cos b + z \cos(b-a) = 0$$
$$x \sin c + y \cos c + z \cos(a-c) = 0.$$

I. I. S.

VII. 751. Să se găsească cazurile în care sistemul

$$x + aby = c^2 \quad ; \quad x + bcy = a^2 \quad ; \quad x + cay = b^2$$

este compatibil. Să se rezolve în acele cazuri.

I. I. S.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 668.* Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 - 27x - 2m^3 = 0,$$

ştiind că admite două rădăcini egale.

I. I. S.

VIII. 669. Să se determine m în aşa fel încât ecuaţia

$$16x^4 - 40x^2 + mx - 7 = 0$$

să aibă o rădăcină dublă.

I. I. S.

VIII. 670. Fie M un punct variabil pe prima bisectoare a unghiului axelor de coordonate dreptunghiulare XOY şi A (a, b), B (b, c) două puncte fixe. Dreapta MA taie axa OX în P, iar dreapta MB taie axa OY în Q.

Să se arate, că dreapta PQ are o direcţie fixă.

G. D. S.

VIII. 671. Să se găsească punctele de pe dreapta $x+2y-6=0$, de unde putem duce tangente perpendiculare, una pe alta, la cercul $x^2 + y^2 - 4 = 0$ şi să se scrie ecuaţiile acestor tangente.

G. D. S.

VIII. 672. Se dau punctele A (3, 0) şi B $(-1, 8)$. Prin A se duce o paralelă (D) la prima bisectoare a unghiului axelor.

a) Să se determine coeficientul unghiular al unei drepte, ce trece prin B şi care să taie dreapta (D) într'un punct C, astfel ca triunghiul CAB să fie isoscel $(\overline{CA} = \overline{CB})$.

b) Să se calculeze coordonatele punctului H de întâlnire al înălţimilor triunghiului.

c) Să se găsească coordonatele centrului (O) al cercului ABC.

G. D. S.

VIII. 673. Se cer punctele, de pe dreapta $3x - y + 4 = 0$, din care putem duce tangente de *trei unităţi* la cercul

$$x^2 = y^2 - 6x + 2y = 0.$$

G. D. S.

VIII. 674. Se cere punctul egal depărtat de două puncte date A şi B, care are aceeaşi putere faţă de cercurile (C_1) şi (C_2).

Aplicaţie numerică:

$$(C_1)\ x^2+y^2-6x+4y+9=0\ ;\ (C_2)\ x^2+y^2-8y+7=0$$

$$A\ (4,\ 6)\ ;\ B\ (8,\ 4).$$

G. D. S.

VIII. 675. Triunghiul dreptunghiu ABC ($\hat{A}=90^0$) e tăiat de o transversală în punctele M, N, P aşezate respectiv pe laturile BC, CA, AB.

Perpendicularele în M şi N pe BC şi CA se taie în C'. Analog se obţin punctele A' şi B'. Să se demonstreze:

a) că dreptele BB' şi CC' sunt perpendiculare;

b) că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente.

G. D. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 593.* Să se arate că suma

$$n^1-2n^3-n^2+2n$$

se divide prin 24.

GH. B.

E. G. 594. Să se demonstreze că expresia

$$(n+1)^{n^2+2n+1}-n\,(n+1^{n^2+n+1}-(n+1)^{n^2+n}-$$
$$-(n+1)^{2n+2}+(n+1)^{n+3}$$

nu are termeni în n^4 şi n^5.

GH. B.

E. G. 595. Să se arate că $(9m-2)$ poate fi patrat perfect pentru unele valori ale lui m, pe când $(9m-2)$ nu este niciodată patrat perfect.

GH. B.

E. G. 596. Dacă x, y, z sunt numere întregi şi pozitive, atunci avem

$$2\,E\left(\frac{y}{z}\right)\leqq E\left(\frac{x+y}{z}\right)-E\left(\frac{x-y}{z}\right),$$

unde E (i) înseamnă întregii cuprinşi în numărul i.

E. G. 597. Dacă a şi b sunt întregi pozitivi, atunci avem

$$\frac{n(n+1)}{2} E\left(\frac{a}{b}\right) \leqq \sum_{1}^{n} E\left(\frac{ia}{b}\right),$$

unde E (i) înseamnă întregii cuprinşi în numărul i.

I. L.

E. G. 598. Dacă x, y, z sunt numere întregi şi pozitive, atunci avem

$$E\left(\frac{x-y}{z}\right) + E\left(\frac{x-y}{y}\right) < \left[E\left(\frac{x}{z}\right) - E\left(\frac{y}{z}\right)\right] + \left[E\left(\frac{x}{y}\right) - E\left(\frac{z}{y}\right)\right],$$

unde E (i) înseamnă întregii cuprinşi în numărul i.

I. L.

E. G. 599. Să se rezolve în numere întregi sistemul

$$E\left(\frac{x}{y}\right) = 3 \quad ; \quad E\left(\frac{2x}{y}\right) = 7,$$

unde E (i) înseamnă întregii lui i.

I. L.

E. G. 600. In ce caz avem

$$E\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left[E\left(\frac{x}{y}\right)\right]^n,$$

E (i) înseamnă întregii lui i.

I. L.

E. G. 601. Dacă $E\left(\frac{x}{y}\right) = 2$, când putem avea $E\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 7$, E ($i$) înseamnă întregii lui i.

I. L.

E. G. 602. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia

$$E\left(\frac{x+10}{x}\right) = 3,$$

unde E (i) înseamnă întregii lui i.

I. L.

ERATA. La pag. 41, Exerciţiul IV: 679, rândul al treilea să se înlocuiască + — cu —

La pag. 44, Exerciţiul VII: 736, să se înlocuiască C_{m-1}^{n} cu C_{m-n}^{n}.

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 şi 4 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 300 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . Lei 150

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian**. . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 250

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 22.410

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 6 1 MARTIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 3-9809

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 6 — 1 MARTIE 1944

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL DE MECANICĂ

7. Se dau 2 forţe: $F_1 = 10$ kg; $F_2 = 20$ kg, făcând între ele 60^0. Să se determine cum trebue să fie situate forţele $F_3 = 5$ kg şi $F_4 = 25$ kg ca sistemul celor 4 forţe să fie în echilibru.

8. Se iau 3 chibrite identice, presupuse bare omogene de greutate G şi lungime l. Două dintre ele, AB şi CD se aşează paralele între ele cu capetele rezemate pe patru pietricele situate într'un plan orizontal. Perpendicular pe ele, astfel încât formează litera H se aşează cel de al 3-lea chibrit EF cu capete rezemate pe AB şi CD, astfel încât E este situat la un sfert din AB şi F la un sfert din lungimea lui CD. Intr'un punct M situat la un sfert din lungimea lui EF se aşează o mică greutate egală tot cu G. Să se determine reacţiunile din A, B, C, D.

9. Unei foi de hârtie patrată de latură a, i se îndoaie pe rând colţurile astfel încât colţul să se aplice în centru (porţiunea îndoită e deci triunghiulară). Să se arate unde se mişcă centrul de greutate al foii, de când foaia e întinsă până ce sunt îndoite toate patru colţurile.

10. O bară omogenă îndoită sub 90^0 formând litera L este atârnată de extremitatea A a barei AB (B este în vârful unghiului drept). Porţiunea de bară AB are lungimea l. Să se determine ce lungime trebue să aibă cealaltă bară a lui L, BC, care e îndoită cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de AB, pentru ca unghiul lui AB cu verticala să fie de 30^0 la echilibru.

11. Pe o masă orizontală e situată o placă omogenă patrată de latură l, din care a fost tăiată o porţiune patrată de latură $\frac{l}{2}$, cu laturile paralele cu ale plăcii, şi cu centrul pe o paralelă la laturi trecând prin centrul plăcii.

Se întreabă, cum trebue situată placa pe marginea mesei astfel ca porţinea ce iese de pe masă să fie cea mai mare posibil. Cât este această distanţă (laturile plăcii fiind paralele cu marginea mesei).

12. Fie un pahar cilindric de rază R, asezat pe o masă orizontală. O bară de lungime l şi greutate G este în echilibru cu o extremitate în contact cu un perete al paharului (nu se reazămă pe fund) şi sprijinindu-se pe baza paharului sub unghiul de 30^0 faţă de orizontală. Să se determine lungimea barei.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 562. Intre* n *şi* $2n$ *se găsesc mai puţine numere prime ca între* $2n$ *şi* $4n$.

I. L.

Ţinând seamă de *E. G. 561*, deducem lesne că între N şi $\varepsilon . N$ se găseşte cel puţin un număr prim dacă $\varepsilon = \frac{x+1}{x}$, când $N = x.(x+1)$. Deci ε este cu atât mai mic, cu cât N este mai mare. Astfel:

Dacă $N \geqslant$	10	100	1000	10.000
Atunci $\varepsilon =$	1,31	1,10	1,03	1,01

Prin urmare admitem intervalele:

$$n \to \varepsilon_1 . n \to \varepsilon_1^2 . n \to \ldots \to \varepsilon_1^{\alpha} . n$$

unde $\varepsilon_1^{\alpha} = 2$, în care avem α numere prime. Atunci putem forma şi intervalele:

$$2n \to \varepsilon_2 . (2n) \to \varepsilon_2^2 . (2n) \to \ldots \to \varepsilon_2^{\beta} . (2n) \quad \text{unde} \quad \varepsilon_2^{\beta} = 2.$$

Dar cum: $\varepsilon_1^{\alpha} = \varepsilon_2^{\beta}$ şi cum $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, căci $n < 2n$, urmează că $\beta > \alpha$, adică numărul de numere prime este mai mare.

E. G. 563. Să se arate că în primele 10^n *numere avem cel puţin* $4n$ *numere prime.*

I. L.

Pe o cale similară soluţiei dela *E. G. 561* se poate arăta că, între n^2 şi $n(n+1)$ avem cel puţin un număr prim. Deci între patratele a două numere consecutive avem cel puţin două numere prime. Atunci în primele N^2 numere consecutive avem $(N-1)$ intervale:

$$1^2 \to 2^2 \to 3^2 \to \ldots \to N^2$$

cu câte două numere prime, adică în total avem

$$2(N-1)+1 = 2N-1$$

numere prime, socotind şi pe 1.

Dacă facem $N^2 = 10^n$, avem $(2 \cdot 10^{\frac{n}{2}} - 1)$ numere prime.

Dar: $$2 \cdot 10^{\frac{n}{2}} - 1 > 4n$$

pentru $n > 1$.

E. G. 564. Dacă în primele n *numere avem* 10 *numere prime, atunci în primele* n^2 *numere avem cel puţin* 21 *numere prime.*

I. L.

Ţinând seamă de *E. G. 563*, în primele n numere avem cel puţin $(2\sqrt{n} - 1)$ numere adică: $2\sqrt{n} - 1 \geqslant 10$. Atunci cum în primele n^2 avem $(2n-1)$ cel puţin de numere prime, urmează că: $2n - 1 \geqslant 21$.

Dar din prima neegalitate deducem:

$$n \geqslant \left(\frac{11}{2}\right)^2,$$

adică: $n > 30$; valoare care satisface cu mult condiţia a doua.

Pe o altă cale se poate arăta că:

$$2 \cdot I_n[2.3.5.7.11\ldots(\sqrt{n})] < I_{n^2}[2.3.5.7.11\ldots(n)]$$

Insă cum $\sqrt{n}.\sqrt{n} = n$ şi $n.n = n_2$, avem:

$$I_n [2.3.5.7.11 \ldots (\sqrt{n})] = (\sqrt{n})$$

§

$$I_{n2} [2.3.5.7.11 \ldots (n)] = (n).$$

Prin urmare $2(\sqrt{n}) < n$ pentru $(\sqrt{n}) > 2$.

E. G. 565. Dacă $a < b < c$ sunt trei numere prime consecutive, atunci pentru $a \geqslant 7$ avem: $a^3 > b^2 > c$.

I. L.

Ţinând seamă de *E. G. 561*, fie $a = n(n+1)$, atunci $b \leqslant (n+1)^2$, deci va trebui să avem:

$$n^3 (n+1)^3 > (n+1)^4$$

condiţie care se reduce la $n^3 > n+1$ evidentă pentru $n > 1$.

De asemenea dacă: $b = n(n+1)$ atunci $c \leqslant (n+1)^2$, deci va trebui să avem:

$$n^2 . (n+1)^2 > (n+1)^2$$

sau: $n^2 > 1$ ceace este evident.

Dacă $a < 7$ atunci: $a=2$, $b=3$, $c=5$ sau $a=1$, $b=2$, $c=3$, soluţii care nu satisfac.

E. G. 566. Să se arate că cel mai mic şi cel mai mare număr, având acelaşi număr de factori primi, au acelaşi număr de divizori, dacă suma exponenţilor este constantă.

I. L.

Fie: $N = \underbrace{a^\alpha . b^\beta \ldots l^\lambda}_{m}$, atunci dacă: $a+b+\ldots+l=c$ avem:

$$(N)_{max.} = a . b \ldots l^{c-(m-1)} \quad \text{şi} \quad (N)_{min.} = a^{c-(m-1)} . b \ldots l$$

Deci în ambele cazuri avem:

$$n(N) = 2^{m-1} . (c - m + 2)$$

E. G. 567. Care este cel mai mic număr de trei cifre, care are cel mai mare număr de divizori?

I. L.

Numărul poate avea 2, 3 şi 4 factori primi (cu unul dă un număr de divizori prea mic), adică poate avea formele:

$$2^{\alpha}.3^{\beta} \; ; \; 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma} \; ; \; 2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}.7^{\delta},$$

care pot da cele mai mici numere. Prin încercări avem:

α	8	7	6	5	4	3	6	5	4	3	2	2	3	2	1
β	1	1	2	3	3	3	1	1	2	2	2	2	1	1	1
γ	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	2	1	1	1	1
δ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	1
N	768	384	576	864	432	216	960	480	720	360	900	180	840	420	210
n (N)	18	16	21	24	20	16	28	24	30	24	27	18	32	24	16
N/n (N)	42,6	24,0	27,4	36,0	21,6	13,5	34,3	20,0	24,0	15,0	33,3	10,9	26,2	17,5	13,1

Se vede dar că: N = 180 dă un minimum.

Până la 1 Februarie 1944 s'au primit soluţii bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a V-a: Păcuraru I. Doina (V : 810); Stănijan I. Olimpia (V : 810).

Clasa a VI-a: Ardelean I. Mioara (VI : 812, 3); Jercan M. Aurelia (VI : 812, 3); Jercan A. Aurica (VI : 806, 7, 8, 9); Munteanu E. Margareta (VI : 806, 7, 8, 9, 10).

Clasa a VII-a: Cădam Minerva (VII : 725); Egler A. Aurelia (VII : 743); Opriş C. Iulia (VII : 725, 6); Portolache I. Nina (VII : 725, 8, 30).

Clasa a VIII-a: Nicolae Dumitra (VIII : 644, 7).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a V-a: Suciu I. Petru (V : 810).

Clasa a VII-a: Cheverşan M. Gheorghe (VII: 718, 20, 5, 8, 30, 1): Crâsnic Titus (VII: 725, 8, 30, 4, 5, 6, 42); Lupuţiu V. Traian (VII: 725, 38, 9, 42); Opriş Gh. Constantin (VII; 728, 30, 3, 4, 5, 8); Schiopu R. Ion (725, 7, 8, 30, 1).

Liceul „Gh. Codreanu", Bârlad.

Clasa a VII-a: Manoliu Sp. Mihai (VII: 731, 2, 42, 3, 4).

Liceul de fete, Beiuş-Bihor.

Clasa a V-a: Oala A. Ana (V: 798, 805).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş-Bihor.

Clasa a V-a: Chirilă A. Radu (V: 805, 12, VI: 812); Mochnacs Mihai (VI: 807, 8, 10).

Clasa a VI-a: Cosma L. Gavril (VI: 809, 10, 2, VII: 733).

Clasa a VII-a: Ardeleanu V. Aurel (VII: 725, 33, 5, 8, 42, 3, 4); Cioara A. Viorel (VII: 742, 3, 4); Fitero Ioan (VII: 733, 42, 3); Goldiş T. Gheorghe (VII: 733, 8, 42, 4); Hodişan Florian (VII: 733, 42, 3, 4); Ilea I. Vasile (VII: 725, 33, 5, 8, 42, 4); Logofătu M. Tănase (VII: 727, 8, 39, 42, 3, 4); Maliţa A. Mircea (VII: 725, 7, 8, 39, 40, 1, 2, 3, 4); Popa D. Vasile (VII: 733, 42, 3, 4); Szücs E. Eugen (VII: 742, 3, 4); Vezea Gh. Florian (VII: 733, 42, 3).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Beschea I. Radu (VII: 732, 3, 8, 9, 42, 3); Constantinescu N. Ilie (737, 9, 42; E. G.: 573).

Clasa a VIII-a: Gafiţescu M. Alexandru (VIII: 653); Marin Th. Mircea (VIII: 655, 6, 7, 9).

Liceul „Dr. Ion Meşotă", Braşov

Clasa a III-a: Teodorescu C. Constantin (III: 241).

Clasa a VIII-a: Nistor V. Horia (VIII: 668).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a V-a: Dimitrescu Gh. M. Simona (V: 800, 2).

Clasa a VII-a: Hagi-Paraschiv A. Liliana (VII: 738, 9, 47, 8); Simionescu I. Ligia (VII: 730, 1); Stoenescu A. Felicia (VII: (725, 6, 30, 5, 8); Ţeican D. Maria (VII: 725, 39, 43); Vasilescu M. Marioara (VII: 733, 5).

Clasa a VIII-a: Beşa E. Rodica (VIII: 668, 72).

Institutul „Sf. Maria", Bucureşti.

Clasa a V-a: Prassa Gh. Alexandra (V: 800, 1).

Clasa a VI-a: Atanasiu C. Rodica (VI: 807, 8, 9).

Liceul de fete „Iulia Hasdeu", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Emanoil C. Ana (VII: 743).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Olaru Gh. Victor (IV: 676, 81, 4).

Clasa a V-a: Eremia I. Mihai (V: 802).

Clasa a VI-a: Barbaiani A. Mihai (VI: 806, 7, 8, 9, 10, VII: 722, 4, VIII: 645, 50); Diaconu C. Constantin (VI: 809, 10); Leon Al. Mihai (VI: 802, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, VII: 718, 20, 2); Marinescu A. Mihai (VI: 807, 8).

Clasa a VII-a: Dumitrescu Valeriu (VII: 718, 21, 5), Şerban N. Dumitriu (VII: 732, 8, 9, 44).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Săvescu A. Mircea (VI: 813, 9).

Clasa a VII-a: Ionescu N. Gheorghe (VII: 718, 9, 25, 32).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Costescu L. Lucian (VII: 735, 42, 3); Iacobescu A. Const. (VII: 725); Temelcu N. Cezar (VII: 712, 25, 8, 37).

Clasa a VIII-a: Nistor Gh. Gheorghe (VIII: 645, 9); Timotin Al. Alexandru (VIII: 646, 7, 9, 50, 1, 5, 6, 7).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a V-a: Cojocaru I. Anatolie (V: 810, 1, 5); Doneaud E. André (V: 810, 12); Haret Sp. Radu (798, 800, 1, 2, 3, 7, 8, 10); Munteanu Gheorghe (V: 810); Seni Dinu (V: 801, 7, 13, 15, VI: 807); Vasile Gh. Grigore (V: 807).

Clasa a VI-a: Ardare N. Nicolae (VI: 809, 10, 1, 5, 8, 9).

Clasa a VII-a: Cantuniar I. Cristu (VII: 745, 6, 7, 8, 9, 51); Codreanu M. Nistor (VII: 733, 43, 4); Corbaru A. Vladimir (VII: 742, 4, 8); Ionescu Alexandru (VII: 726, 30, 5, 8); Radu Gh. Iorgu (VII: 743); Ulieru C. Mihail (VII: 720, 3).

Clasa a VIII-a: Manasian M. Dragoş (VIII: 650, 1, 5, 6, 7, 9).

Liceul „Matei Basarab", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Ieşan Alexandru (VII: 728, 34, 5, 9, 42, 4); Muntz Eduard (VII: 724, 5, 7, 30, 1, VIII: 644, 8, 9).

Clasa a VIII-a: Antonescu D. Eugen (VIII: 646, 7, 53, 4, 6, 64, 5); Constantin St. Artur (VIII: 644, 5, 7, 8, 9, 50); Mateescu N. Dinu (VIII: 644, 5, 6, 8, 9, 50, 1), Popescu N. Ştefan (VIII: 646, 7, 51); Philipovici Dorian (VIII: 645, 8, 9, 50).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa a VIII-a: Prassa Gh. Constantin (VIII: 644, 5, 8, 9, 50, 9, VIII: 655, 7).

Liceul „Mihai Viteazul", Bucureşti.

Clasa a V-a: Hristea H. Dan (V: 800).
Clasa a VIII-a: Maitros N. Ioanis (VIII: 645, 8, 9, 53, 5, 7, 8).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Danielescu C. Constantin (VII: 725, 7, 30, 4).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Letia L. Valentin (VII: 722, 5, 30, 1, VIII: 637); Pitiş L. N. Armand (VII: 730, 7).

Gimnaziul „I. Eliade Rădulescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Corâciu N. Iulian (IV: 671, 2, 80, 1, V: 807).

Liceul „Ştirbey Vodă", Călăraşi-Ialomiţa.

Clasa a III-a: Năstase V. Emil (III: 241, 2).
Clasa a IV-a: Beroniade C. Vicenţiu (IV: 671, 2, 3, 4, 6, V: 800).
Clasa a VI-a: Coţofană M. Alexandru (VI: 809, 10).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa a VI-a: Stroescu I. Florea (VI: 809, 10).
Clasa a VII-a: Barbu A. Ioan (VII: 725, 7, 32, 8, 9, 42, 3, 4, VIII: 644, 5, 55): Grigore A. Gheorghe (VII: 725, 7, 32, 40, 2, 3, 4, VIII: 644, 5, 6, 7, 50, 5).

Liceul „Traian Doda", Caransebeş.

Clasa a VI-a: Stan O. Petru (VI: 818, 9).

Liceul „Alecu Russo", Chişinău.

Clasa a VIII-a: Burlacu I. Eugen (VIII: 644, 5, 6, 7, 9, 50, 4, 5, 6, 7, 8, 9); Filioneanu M. Leonid (VIII: 639, 40, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 50, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa a IV-a: Cuşută H. Alexandru (V: 800, VI: 809, 10, 1).
Clasa a V-a: Munteanu C. Nicolae (V: 800).
Clasa a VIII-a: Ghercic A. Gheorghe (VIII: 645, 6, 55).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a IV-a: Lungu I. Dorina (IV: 683, 4); Georgescu C. Gabriela (IV: 671, 2, 3, 4, 5, 6, 82, V: 800, 2).

Clasa a VII-a: Petroşanu Gh. Ligia (VII: 739, 42, 3, 4).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Dumitrescu A. Paul (V: 800, 2, 10, 1).

Liceul „Fraţii Buzeşti", Craiova.

Clasa a VII-a: Dobrişan A. Alexandru (VII: 725, 33, 4, 5, 42, 3, 4).

Liceul „Radu Negru", Făgăraş.

Clasa a VII-a: Tutor I. Aurel (VII: 730, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa a VII-a: Vartolomei L. Olga (VII: 718).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa a III-a; Midvichi Ioan (III: 242, 39).

Clasa a IV-a: Anton C. Aurel (IV: 684); Bosinceanu P. Pavel (IV: 683, 4, 5); Crivăţ C. Gheorghe (IV: 684). Drăghicescu I. Const. (IV: 675, 83, 4, 5, V: 800); Enăchescu V. Teodor (IV: 684). Filip V. Ioan (IV: 676, 84, V: 800); Gheorghe C. Dorin (IV: 683, 4, 5); Huideş N. Alexandru (IV: 676, 83, 4, 5, V: 800); Mardare Mihai (IV: 684); Nichita I. Constantin (IV: 684, 5); Păstrăvanu C. Decebal (IV: 684); Platon C. Florin (IV: 684); Tofan C. Aurel (IV: 676, 84, 5, V: 800); Zăhărescu Gheorghe (IV: 684).

Clasa a VI-a: Bârzescu Mircea (VI: 818, 9); Ciureanu Gh. Constantin (VI: 819, 9); Nache Dumitru (VI: 807).

Clasa a VII-a: Damian N. Ştefan (VII: 728); Mocanu Mircea (VII: 733, 43, 4); Petrescu V. Dumitru (VII: 727, 32); Roşu T. Nicolae (VII: 728, 9).

Clasa a VIII-a: Andrei C. Aurel (VIII: 662); Vasiliu Gh. Dumitru (VIII: 663, 5).

Liceul Internat „C. Negruzzi", Iaşi.

Clasa a IV-a: Filipescu M. Gheorghe (IV: 676).

Clasa a VI-a: Arbănaş N. Mircea (VI: 809, 10), Avădani C. Chiriac (VI: 807, 9); Marta C. Liviu (VI: 807); Matei I. Emanuel (VI: 807, 10).

Clasa a VII-a: Bălan Andrei (VII: 742, 3); Chelaru I. Mihai (VII: 733, 4, 6, 7); Mărgărit C. Constantin (VII: 733, 42, 3); Popa N. Eugen (VII: 730, 3, 43, 4).

Clasa a VIII-a: Triandaf A. Ionel (VIII: 645, 6, 8, 50, 1, 2).

Liceul „Petru Rareș", Piatra-Neamț.

Clasa a VI-a: Bârzescu Alexandru (VI: 742, 3, 4).

Liceul „I. C. Brătianu", Pitești.

Clasa a VII-a: Damian M. Constantin (VII: 725, 6, 33, 4, 5, 8).

Liceul de fete „Despina Doamna", Ploiești.

Clasa a VIII-a: Georgescu A. Maria (VIII: 647, 8, 9, 55, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Sf. Petru și Pavel", Ploiești.

Clasa a IV-a: Iosifescu G. Mircea (IV: 676, 80, 1, 2, 3, 4, V: 800); Stavrică Mihai (IV: 676, V: 800).

Clasa a VI-a: Constantinescu M. Dumitru (VI: 814, 7, 8, 9, VII: 737, 8, 42, VIII: 652, 5, 8, 9, 64).

Clasa a VII-a: Ceruleanu C. Florin (VII: 742, 3).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a VII-a: Columbeanu D. Petre (VII: 722, 5, 32, 4, 5, 8, 9, 42, 3); Marinescu Marinel (VII: 738, 9, 43, 50, 1, 2, VIII: 668, 9).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuți.

Clasa a VIII-a: Bocancea E. Octavian (VIII: 655, 6, 7, 63, 5); Ursachi I. Octavian (VIII: 655).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa a IV-a: Porfireanu Gh. Dan (IV: 684).

Liceul de fete Slatina-Olt.

Clasa a VII-a: Zeveleanu Gh. Constanța (VII: 738, VIII: 645).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa a VII-a: Gogiulescu St. Iulian (VII: 730).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa a VII-a: Benga C. Gheorghe (VII: 727, 33, 42, 3); Grămadă C. George (VII: 743).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VIII-a: Gâță Gh. Gheorghe (VIII: 646, 47, 50, 1, 5, 64) Popescu V. Vasile (VIII: 644).

Gimnaziul Mixt „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa a III-a: Avădani B. Vasile (III: 240, 2); Răileanu I. Constantin (III: 242); Săceanu I. Elena (III: 239).

Clasa a IV-a: Antimiu I. Ana (IV: 682); Dragoş Aritina (IV: 682).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa a III-a: Daia Bilcea (III: 237, 39).

Clasa a IV-a: Costache M. Nicolae (V: 795); Stancu Petru (V: 795, 801, 2, 7).

Clasa a V-a: Chiran N. Paul (V: 801, 6, 7, 8, 9, 10, 3); Puşcaş D. Emil (V: 800, 1, 8, 9, 10); Tripşa I. Iosif (V: 795, 7, 805, 7, 10).

Clasa a VI-a: Cochela I. Livius (VI: 812, 3, 4, 6, 7, 8, 23, VII: 733); Filimon Fl. Ioan (VI: 813, 7, 8, 9, VII: 733, E. G.: 573); Gogulescu A. Petre (VI: 818); Ionescu A. Florin (VI: 813, 7, 8, 9); Popescu C. Ovidiu (VI: 813, 7, 8, 9); Rogoz V. Ioan (VI: 812, 3, 4, 5, 7, 8, 9, VII: 733, E. G.: 573); Vrânceanu Gheorghe (VI: 818, 9, 21, VII: 733, E G.: 584, 5, 8, 92).

Clasa a VII-a: Bancu Gheorghe (VI: 739); Cârstea D. Marin (VII: 739, 43); Pavica Victor (VII: 739, 43); Popescu I. Barbu (VII: 733, 4, 5); Strati P. Ionel (VII: 726, 31, 3, 4, 5, 7, 8, E. G.: 573); Ţecu P. Traian (VII: 733, 34, 35).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timişoara.

Clasa a V-a: Alexe Gh. Adrian (V: 795, 6, 7, 8, 9, 800, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 1, VI: 801, 3, 5, 6, 7, 8, 12, VII: 733, E. G.: 568, 73, 7, 8).

Clasa a VII-a: Ccroiu P. Ioan (VII: 730, 1, 9, 43); Mugurel I. Jula (VII: 732, 3, 4, 5, 8); Popescu Gr. Dumitru (VII: 733, 8, 9, 43); Sârbu I. Iancu (VII: 732, 3, 4, 5); Şerăngău Mihai (VII: 720, 3, 33, 5, 8, 9, 42, 3, 4); Tincu C. Constantin (VII: 718, 9, 20, 1, 3, 4, 7, 9, 31, 3, 5, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 50, E. G.: 543, 73).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a III-a: Pleşu Sp. Bucur (III: 237, 40, 1).

Clasa a VII-a: Martin D. Constantin (VII: 728, 33).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa a V-a: Budrică E. Eliza (V: 805, 12).

Clasa a VII-a: Firoiu I. Maria (VII: 733, 4, 5, 6, 8).

Clasa a VIII-a: Alexandrescu Al. Eva (VIII: 645, 6, 9, 55, 7, 68, 9).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a III-a: Roibu R. Victor (III: 241); Sgândăr H. Sebastian (III: 241); Sjitea Dan (III: 239).

Clasa a V-a: Bălulescu Ionel (V: 807, 10, 2, VI: 804, 7); Călugăru I. Dumitru (V: 810, 1, 2, VI: 812): Enea I. Gheorghe (V: 807, 10); Manasia C. Mihai (V: 805, 7, 12); Negoescu D. Mihail (V: 798, 800, 1, 2, 5, 7, 8, 10, 2, VI: 806, 7, 8); Rogoveanu N. Petre (V: 807, 10).

Clasa a VI-a: Braşoveanu D. Gheorghe (VI: 812, 3, 4, 6, 7, 8, 9, VII: 731, 2, 3, 4, 7, 42, E. G.: 573); Bocârnea C. Eugen (VI: 819); Cămuescu C. Constantin (VI: 809, 16); Caramaliu D. V. (VI: 817, 8, 9); Ionescu P. Aurel (VI: 809, 10, 3, 4, 9); Mihăilescu Gh. Dumitru (VI: 806, 7, 8, 12); Muscalu Gr. Alexandru (VI: 806, 7, 8); Pârşanu C. Mihail (VI: 813, 9); Puicea E. Aristide (VI: 813, 9).

Clasa a VII-a: Boldea D. Constantin (VII: 729, 30, 1, 4, 5, E. G.: 573); Cazacu C. Ioan (VII: 732, 3, 4, 5, 8, 42, 3); Cleanoveanu N. Alexandru (VII: 725, 30, 1); Ionescu P. Paul (VII: 744); Mănescu Gh. Gheorghe (VII: 732, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 42, 3, 44); Meilă I. Emil (VII: 732, 3, 4, 5, 8, 42, 3); Oprea M. Iordache (VII: 739, 43, 9, 50): Pătăşanu D. Valeriu (VII: 732, 3, 4, 5, 8, 42, 3, 50); Pantă A. Gheorghe (VII: 732, 3, 4, 5, 8, 42, 3); Pletcu C. State (VII: 732, 3, 5, 8, 42, 3, 50); Săbiescu C. Stelian (VII: 732, 3, 4, 5, 8, 42, 3); Trocan N. Nicolae (VII: 732, 3, 4, 5, 42, 3, 4, 50, 1).

Clasa a VIII-a: Vlăduţ Şt. Constantin (VIII: 646, 50, 5, 6, 7, 8).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iunie 1944

Clasa a III-a. *Exerc. 252.* Se dă dreptunghiul ABCD şi se proiectează punctul A în E pe diagonala BD, iar E în F pe diagonala AC; asemenea se proiectează D în G pe AC, iar G în H pe BD.

Să se arate, că patrulaterul EFHG este trapez isoscel. Cunoscând lungimile laturilor dreptunghiului ABCD, să se calculeze laturile trapezului EFGH.

O. N. Ţ.

III. 253. Fie ABCD un patrulater dat oarecare şi O intersecţia diagonalelor AC, BD. Pe OB luăm un punct M.

Din M ducem o paralelă la DA, care taie pe OC în N; apoi din N o paralelă la AB, care taie pe OD în P; iar din P o paralelă la BC, care taie pe OA în R.

Să se arate, că patrulaterul MNPR este asemenea cu patrulaterul dat ABCD.

In ce caz, patrulaterul construit este egal cu patrulaterul dat?

O. N. Ţ.

III. 254. Se dă un trapez isoscel ABCD. Prelungim latura CD cu segmentul $\overline{DF} = n$ şi latura AB cu segmentul $BE = m$. Să se calculeze lungimea segmentului $\overline{EF}$ şi a porţiunii lui cuprinsă între bazele trapezului dat.

Aplicaţie:

$m = 8\ cm$; $n = 6\ cm$; $\overline{AB} = \overline{CD} = 10\ cm$; $\overline{BC} = 18\ cm$; $\overline{AD} = 6\ cm$.

O. N. Ţ.

Clasa a VI-a. *Exerc. 691.* Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{2x+5}{(2x+17)^2\,(2x-17)} + \frac{2x-5}{(2x-17)^2\,(2x+17)} = \frac{2}{4x^2-289}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 692. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{143x+144}{(195x+196)^2\,(255x+256)} - \frac{187x+188}{(195x+196)\,(255x+256)^2} = \frac{1234}{(195x+196)^2\,(255x+256)^2}$$

şi să se verifice soluţia aflată.

O. N. Ţ.

IV. 693. Se ia un punct I pe latura BC a triunghiului ABC şi se duc perpendicularele $\overline{IM}$ şi $\overline{IN}$ respectiv pe AB şi AC.

In punctele M şi N se duc planele (R) şi (S) respectiv perpendiculare pe AB şi AC. Fie dreapta (D) intersecţia planelor (R) şi (S); iar P punctul unde (D) înţeapă un plan (T) parale cu planul ABC şi la distanţa *d* de acest plan.

Cunoscând lungimile laturilor triunghiului ABC şi a segmentului BI, să se calculeze

a) distanţele punctului P la vârfurile triunghiului ABC;

b) lungimile perpendiculare lor $\overline{IM}$ şi $\overline{IN}$;

c) distanţele punctului P la laturile AB, BC, CA.

O. N. Ţ.

IV. 694. Intr'un plan (P), se dă un cerc (O) de rază *r*, un punct A aşezat la o distanţă de centrul O egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul (O); iar pe perpendiculara în A la planul (P) un punct B la o distanţă de A egală cu latura patratului înscris în cercul (O).

Fie M un punct al cercului (O), astfel că distanţa lui la punctul A este egală cu raza cercului (O), iar M' punctul diametral opus lui M în acest cerc.

Să se arate, că

$$\overline{BM'} = \overline{AM} + \overline{MM'}.$$

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 820.* Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} + \frac{x}{x + a} - \frac{a}{x - a} = 1.$$

GH. B.

V. 821. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 4xy + 5xyz = -19 \\ 4x + 5xy + 3xyz = -4 \\ 5x + 3xy + 4xyz = -13 \end{array}\right.$$

O. N. Ţ.

V. 822. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\left|\begin{array}{l} mx^2yz + nxy^2z + pxyz^2 = a \\ nx^2yz + pxy^2z + mxyz^2 = b \\ px^2yz + mxy^2z + nxy^2 = c, \end{array}\right.$$

în care a, b, c, m, n, p sunt numere reale date, iar x, y, z numere reale necunoscute,

Caz particular: $a = b = c = 1$.

O. N. Ţ.

V. 823. Trei triunghiuri ABC, CDE, EFG au laturile AC, CE, EG în prelungire şi sunt asemenea având celelalte laturi omoloage paralele.

1°. Cunoscând pe $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ şi $\overline{AG}$, să se calculeze celelalte laturi ale triunghiurilor.

2°. Să se arate, că, pentru ca punctele B, D, F să fie colineare, condiţia necesară şi suficientă este ca $\overline{CD}$ să fie media geometrică a laturilor $\overline{AB}$, $\overline{EF}$.

G. D. S.

V. 824. Se consideră patratele ABCD, BEFG situate de o parte şi de alta a segmentului BCG. Dreapta DF taie pe $\overline{BCG}$ în H. Să se demonstreze relaţia

$$\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HG}^2 + 2\ \overline{DH} \cdot \overline{HF}.$$

V. Gh.

Clasa a VI-a. *Exerc. 830.* Latura *a* a unui triunghiu are 17,043 m şi unghiurile vecine $B = 43^0\,16'$, $C = 68^0\,42'$.

Să se arate, că aria triunghiului este sensibil egală cu un *ar.*

N. M.

VI. 831. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând *un unghiu, o latură* alăturată unghiului şi raza cercului circumscris triunghiului.

M. G.

VI. 832. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând *două laturi* şi *raza* cercului circumscris triunghiului.

M. G.

VI. 833. Să se rezolve un triunghiu oarecare, cunoscând *o latură, înălţimea* corespunzătoare şi *raza* cercului circumscris triunghiului.

M. G.

VI. 834. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând *o latură*. înălțimea corespunzătoare altei laturi și raza cercului circumscris triunghiului.

M. G.

VI. 835. Se dă o prismă dreaptă ABCDEF și fie M mijlocul muchei laterale $\overline{AF}$; A′, F′ picioarele înălțimilor $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$ în triunghiurile de bază ABC și FED. Să se arate, că perpendicularele, duse din M, A și F respectiv pe planele BCDE, MBC și MDE, sunt trei drepte concurente.

O. N. Ț.

Clasa a VII-a. *Exerc. 752.* Să se rezolveze sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ (a^2 - bc)\,x + (b^2 - ca)\,y + (c^2 - ab)\,z = 0 \\ (na + b + c)\,x + (a + nb + c)\,y + (a + b + nc)\,z = 0. \end{cases}$$

I. I. S.

VII. 753. Să se studieze variația funcției

$$y = nx^{n+1} - (n + 1\,x^n + 1,$$

n fiind un număr întreg, pozitiv. Să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$nx^{n+1} - (n + 1)\,x^n + 1 - a = 0,$$

a variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

VII. 754. Să se construiască și să se rezolve triunghiul dreptunghiu de arie maximă, cunoscând poziția unui vârf și a centrului său de greutate.

V. Gh.

VII. 755. Să se arate, că

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a & b & F(x) \\ b & c & G(x) \\ F(x) & G(x) & 0 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} a & b & F'(x) \\ b & c & G'(x) \\ F(x) & G(x) & 0 \end{vmatrix},$$

unde $\frac{d}{dx}$ înseamnă derivata în raport cu x.

N. M.

VII. 756. Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

ştiind că: 1°. Curba reprezentativă a variaţiei este o curbă trecând prin punctul M (5, 4).

2°. Panta curbei în punctul M este egală cu $-\frac{5}{2}$.

3°. Curba are asimptotele $x = 3$ şi $y = 2\frac{1}{2}$.

V. GH.

VII. 757. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = x(1 + x - x^2 - x^3)$$

şi să i se construiască curba reprezentativă.

GH. B.

VII. 758. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \frac{1 - 3x^2 - x^3}{1 + 36x + 9x^2}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 676.* Se dau în plan un cerc (O) şi o dreaptă (Δ). Un punct M mobil pe cerc se proiectează în N pe (Δ). Se cere ecuaţia locului simetricului lui N faţă de M.

GH. B.

VII. 677. Să se afle locul centrelor cercurilor, care trec printr'un punct fix A şi sunt ortogonale unui cerc dat.

G. D. S.

VII. 678. Se dă elipsa $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}-1=0$ şi se cere să se afle ecuaţiile normalelor paralele cu dreapta $2x+y+3=0$.

Să se determine direcţia tangentei, pe care aceste normale determină un segment al cărui raport la unitate este $\sqrt{13}$.

G. D. S.

VII. 679. In raport cu două axe de coordonate rectangulare, se dau punctele

$$M_1(a, y) \quad ; \quad M_2\left(a, \frac{1}{y}\right) \quad ; \quad M_3\left(a+1, y+\frac{1}{y}\right).$$

Se cere locul geometric al centrului cercului $M_1M_2M_3$, când y este variabil.

C. IONESCU-BUJOR.

VII. 680. Să se determine ecuaţia elipsei raportată la axele sale, ştiind că ea este tangentă dreptelor

$$x-4y+13=0 \quad \text{şi} \quad 4x-5y-25=0.$$

G. D. S.

VIII. 681. Se duce prin mijlocul semiaxei $\overline{OB'}$ o paralelă la axa mare AA' a unei elipse. Această paralelă taie elipsa în punctele M şi N. Să se arate, că tangenta în M e paralelă coardei BN.

G. D. S.

VIII. 682. O tangentă variabilă întâlneşte în punctele M şi M' tangentele duse la extremităţile axei mari ale unei elipse.

1°. Se cere locul geometric al intersecţiei perpendicularelor duse în M şi M' respectiv pe OM' şi OM.

2°. Locul fiind o elipsă, între semiaxele α şi β există relaţia

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{c^2},$$

c fiind semidistanţa focală a elipsei date.

G. D. S.

VIII. 683. Fie F şi F' focarele unei elipse. Dacă axa mare este cât diagonala patratului de latură $\overline{FF'}$, atunci *normala* la elipsă, limitată la axa mare, este *medie geometrică* a segmentelor determinate pe FF'.

G. D. S.

Exerciţii Generale. *Exerc. 603.* Să se arate că numerele

$$2^{2^9} + 1 \quad \text{şi} \quad 2^{16} \cdot 37 + 1$$

sunt divizibile.

I. L.

E. G. 604. Să se arate, că un număr prim nu poate să fie de forma

$$p = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots$$

I. L.

E. G. 605. In şirul primelor N numere avem m numere prime, unde

$$m = n + I_N [2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (\sqrt{N})],$$

n reprezentând factorii primi ai lui N şi $(\sqrt{N})$ reprezintă numărul prim imediat inferior lui $\sqrt{N}$.

I. L.

E. G. 606. In ce caz numărul divizorilor bipatratului lui $5^{\alpha} . 17^{\beta}$, care are trei cifre, este egal cu triplul numărului divizorilor patratului lui.

I. L.

E. G. 607. Dacă $\Delta(i)$ reprezintă suma divizorilor lui i, atunci avem

$$\Delta(n!) < 2^{n-1} . n!$$

I. L.

E. G. 608. Dacă $p(i)$ reprezintă produsul divizorilor numărului i, avem

$$p(n!) < (n!)^{2^{n-2}}.$$

I. L.

E. G. 609. Dacă p este un număr prim și m un întreg pozitiv, atunci

$$\frac{(2m . p)!}{2m . p^{2m}} = \mathcal{M}p + 1.$$

I. L.

E. G. 610. Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din șirul primelor x numere, atunci pentru a și b primi, avem

$$I_n(a . b) < I_n(a) + I_n(b).$$

I. L.

E. G. 611. Puterea n^a a unui număr, terminat cu 11875, se termină cu ultimele cinci cifre cu care se termină numărul $3^n . 11875$.

I. L.

E. G. 612. Să se calculeze numărul numerelor prime inferioare lui 1944 prin considerații de indicatori.

I. L.

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 şi 4 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometrie drept liniară* (după cursul predat de **Gh. Lazăr** la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 30

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVII. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea II-a. Ediţia IV-a, revăzută şi mărită . . . . . Lei 700

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 100

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 3-9803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 22.857

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 7 1 APRILIE 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 7 — 1 APRILIE 1944

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

CONCURSUL DE MECANICĂ

13. Un corp de greutate G este aşezat pe un plan înclinat cu $\sphericalangle \alpha$ faţă de orizontală, fără frecare. Pentru a-l ţine în echilibru este necesară o forţă *orizontală* F. Aşezând acelaşi corp pe un plan orizontal fără frecare, asupra lui lucrând acelaşi F orizontal, să se determine ce spaţiu s parcurge în t secunde?

14. Cu ce acceleraţie se va mişca corpul pe planul înclinat din problema precedentă, dacă înclinarea planului devine 2α, iar F are aceeaşi valoare determinată mai sus, dar este acum paralel cu planul înclinat?

15. Ce viteză *minimă* e necesar să dăm unui lanţ AB de lungime l (de a cărui greutate proprie nu ţinem seama) care are la o extremitate B o cheie de greutate G, pentru ca lanţul să facă rotaţii complecte în jurul lui A? Dublând această viteză, ce forţă de tensiune se va naşte în lanţ?

16. Peste un scripete este trecut un fir. De o parte atârnă o greutate $G = 3$ kg, de cealaltă, o greutate necunoscută P. Ştiind că în primele secunde dela pornire, G coboară o distanţă $s = 1$ m în $t = 2$ sec., să se determine P.

17. Se dă drumul unui corp de greutate $G = 2$ kg dela înălţimea $h = 3$ m. Efectul ciocnirii fiind proporţional cu energia cinetică în momentul ciocnirii, să se calculeze această valoare şi să se exprime în kgm, ergi, jouli, cai-oră, kw-oră.

18. Raza pământului fiind aproximativ 6370 km, să se calculeze forţa centrifugă ce lucrează asupra unui corp de massă egală cu 2 situat la ecuator.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 568. Să se arate că suma divizorilor unui număr este mai mică decât numărul divizorilor înmulţit cu numărul însuşi.*

I. L.

Avem: $s(N) = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ şi $d_i \leqslant N$.

$$N \times n(N) = \underbrace{N + N + \ldots + N}_{n \text{ ori}}.$$

Prin urmare: $s(N) < N \,.\, n(N)$.

E. G. 569. Să se arate că produsul divizorilor unui număr înmulţit cu numărul însuşi este mai mic decât numărul ridicat la o putere egală cu numărul divizorilor.

I. L.

Avem: $p(N) = d_1 \,.\, d_2 \ldots d_n$ şi $N^{n(N)} = \underbrace{N \,.\, N \ldots N}_{n \text{ ori}}$,

deci cum $d_i \leqslant N$, avem: $p(N) < N^{n(N)}$.

E. G. 570. Bipatratul unui număr perfect par diferit de 6 *are, faţă de divizorul* 13, *resturile*: 1 *sau* 3 (în enunţ a fost trecut 4).

I. L.

Ştim că un număr perfect par diferit de 6 are formele:

$$M13 + 1, \quad +2, \quad +3, \quad +8.$$

Ridicând la puterea 4-a, obţinem resturile: 1, 3.

E. G. 571. Cubul unui număr perfect par, diferit de 496. *are față de divizorul* 25, *resturile:* 1, 2, 6, 16, 21.

I. L.

Un număr perfect par diferit de 496 are, față de divizorul 25, resturile: 1, 3, 6, 11 și 16. Cubul lui va avea resturile: 1, 2, 16, 6, 21.

E. G. 572. Produsul divizorilor unui număr perfect par nu poate fi patrat perfect.

I. L.

Numerele perfecte pare au formele: $2^n(2^{n+1}-1)$ unde paranteza este un număr prim, deci numărul divizorilor este: $2(n+1)$, unde n este totdeauna par. Atunci cum produsul divizorilor este: $N^{\frac{1}{2}n(N)} = [2^n(2^{n+1}-1)]^{n+1}$, urmează că nu poate să fie patrat perfect.

Numerele perfecte impare au formele: $a^{n\alpha+1} \cdot P^2$ unde P este impar și nedivizibil cu a. Atunci:

$$n(N) = 2(2\alpha+1)\,\Pi(2i+1).$$

Cum: $\frac{1}{2}\,n(N)$ este impar, înseamnă că nu avem patrat perfect.

Până la 1 Martie 1944 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a V-a: Babuskov I. Magdalena (V: 799, 810, 5); Dalm Hortensia (V: 810); Păcuraru I. Doina (V: 815); Stănijan I. Olimpia (V: 815).

Clasa a VI-a: Ardelean I. Mioara (VI: 818, 9); Jucan A. Aurica (VI: 815, 8, 9); Munteanu Margareta (VI: 812, 3).

Clasa a VII-a: Cădar T. Minerva (VII: 734, 5, 7); Postolache I. Nina (VII: 733); Șătar G. Elena (VII: 733, 4, 5, 6, 7).

Clasa a VIII-a: Nicolae I. Dumitra (VIII: 658); Oreanu F. Maria (VIII: 622).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a V-a: Vlăduţu N. Nicolae (V: 806, 7).

Clasa a VII-a: Crâsnic Titus (VII: 733, 4, 5, 7, 8, 40, 3, 4, 7, 9, E. G.: 593); Lupuţiu V. Traian (VII: 734, 5, 6, 7, 43, 7, 8, 9); Opriş G. Constantin (VII: 732, 6, 7, 43); Şchiopu R. Ioan (VII: 733, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 42, 7, 8, 9); Stoenescu P. Aurel (VII: 733, 4, 6, 43, 6, 8).

Liceul de fete, Beiuş-Bihor.

Clasa a V-a: Oala N. Ana (V: 807, 10).

Clasa a VII-a: Cosma L. Xenia (VII: 736); Mărăcineanu P. Elena (VII: 736); Popa D. Ileana (VII: 743).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuş-Bihor.

Clasa a IV-a: Biliţiu F. Toma (IV: 680, 1); Coriolan I. Toma (IV: 680, 1, 4); Herman Liviu (IV: 681, V: 807); Pantea N. Alexandru (IV: 679, 80, 1, 4); Popa Nicolae (IV: 680, 1); Telecan I. Cornel (IV: 680, 1).

Clasa a V-a: Chirilă A. Radu (V: 815, 6).

Clasa a VI-a: Florian D. Costea (VI: 828, VII: 744, E. G.: 579, 80, 1, 92); Moldovan I. Mircea (VI: 812, VIII: 733).

Clasa a VII-a: Ardeleanu V. Aurel (VII: 734, 6, 7, 9, 45, 6, 7, 8, 9); Cioara A. Viorel (VII: 745, 6, 7, 8, 9); Fitero I. Ioan (VII: 734, 5, 6, 7, 8, 47, 9); Hodişan Gh. Florian (VII: 734, 5, 6, 7, 45, 6, 7, 8, 9); Goldiş Gheorghe (VII: 732, 4, 6, 7, 45, 7, E. G.: 568, 9); Ilea I. Vasile (VII: 734, 6, 7, 9, 45, 6, 7, 8, 9); Logofătu M. Tănase (VII: 736, 45, 6, 7, 8, 9); Maliţa A. Mircea (VII: 745, 6, 7, 8, 9); Mezea Gh. Florian (VII: 734, 5, 6, 7, 8, 45, 7, 8, 9, 51); Popa D. Vasile (VII: 734, 5, 6, 8, 45, 6, 7, 9).

Clasa a VIII-a: Drimba E. Iosif (VIII: 658, 64, 70, 1, 2).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Constantinescu N. Ilie (E. G.: 577, 8, 9, 80, 1); Fanciotti E. Silvio (VII: 732, 6, 7, 45, 7, 8).

Liceul „Dr. Ion Meşotă", Braşov

Clasa a V-a: Daniş I. Ion (V: 810); Ionescu Şt. Ion (V: 799, 810) Simirad G. Ioan (V: 807).

Clasa a VII-a: Alexandrescu M. Mircea (VII: 733, 43, 7, E. G.: 573).

Clasa a VIII-a: Nistor V. Horia (VIII: 655, 6, 7).

Şcoala Centrală de fete, Bucureşti.

Clasa a IV-a: Alexe Maria (IV: 684); Demetrescu R. Rodica (IV: 679, 82, 4); Stoenescu M. Lala (IV: 684).

Clasa a V-a: Diță Antoaneta (V : 815); Furtunescu I. Doina (V : 815); Gurău Cecilia (V : 915); Ionescu Elisabeta (V : 815); Mihai Maria (V : 815); Naneș Constanța (V : 815); Spineanu D. Carmen (V : 815); Velescu Veronica (V : 815); Vintilescu Violeta (V : 815).

Clasa a VII-a: Hagi-Paraschiv A. Liliana (VII : 734, 43); Popescu D. Ligia (VII : 743, 7); Teican D. Maria (VII : 736, 7, 47, 8, 9); Vasilescu Mariana (VII : 743, 7, 8, 9, 51).

Institutul „Sf. Maria", București.

Clasa a V-a: Macavei P. Maria (V : 807); Prassa G. Sanda (V : 805, 7, 10).

Colegiul Național „Sf. Sava", București.

Clasa a IV-a: Stoicescu P. Teodor (IV : 684).

Clasa a VI-a: Săvescu A. Mircea (VI : 814, 8).

Clasa a VII-a: Ionescu N. Gheorghe (VII : 743), Mihail Alexandru (VII : 732, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 42, 3, 6, 8, 9).

Liceul Ortodox „Zoe Râmniceanu", București.

Clasa a VIII-a: Barbu I. Săftica (VIII : 668).

Liceul „Gheorghe Lazăr", București.

Clasa a VII-a: Costescu L. Lucian (VII : 731, 7, 47); Iacobescu A. Constantin (VII : 730, 1, 43, 8); Temelcu N. Cezar (VII : 730, 1, 43).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VII-a: Ieșan Alexandru (VII : 740, 3, 5, 7, 8); Muntz M. Eduard (VII : 732, 3, 4, 5, 6, 7, VIII : 651, 2, 6, 7, 8, 9, E. G. : 579, 80, 1).

Clasa a VIII-a: Antonescu D. Eugen (VIII : 670, 1); Mateescu N. Dinu (VIII : 655, 6, 7, 8, 9, 64); Popescu N. Ștefan (VIII : 654, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Titu Maiorescu", București.

Clasa a V-a: Doneaud E. André (V : 811, 5, 7); Haret Sp. Radu (V : 805, 6, VI : 809, 10); Munteanu G. Laurențiu (V : 807, 20); Seni Gh. Dinu (V : 805, 10, 1, 2, VI : 809, 28, VII : 744, E. G. : 604).

Clasa a VII-a: Cantuniar I. Cristu (VII : 736); Codreanu M. Nestor (VII : 745, 7, 8); Corbaru A. Vladimir (VII : 745, 7); Radu G. Iorgu (VII : 745, 8, 9); Mateescu G. Arghir (VII : 745, 8); Mustăcescu V. Traian (VII : 732, 6, 7); Ulieru C. Mihail (VII : 734, 5, 6).

Clasa a VIII-a: Girescu N. Aurel (VIII : 655, 6, E. G. : 573, 7, 8); Manasian M. Dragoș (VIII : 654, 64, 5, 70, 1); Prassa Gh. Constantin (VIII : 649, 54, 6, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu", Bucureşti.

Clasa a VI-a: Barbaiani Mihai (VI: 813, VIII: 655, 9, E. G.: 568, 9, 72, 6, 7, 8, 80, 1); Diaconu C. Constantin (VI: 813, VIII: 655, 7, E. G.: 580, 1); Leon Al. Mihai (VI: 613, VIII: 655, 7, E. G.: 574, 6, 7, 8, 80, 1).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a VII-a: Daniilescu C. Constantin (VII: 732, 6, 7).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VII-a: Letia L. Valentin (VII: 732, 6, 7).

Gimnaziul „I. Eliade Rădulescu", Bucureşti.

Clasa a IV-a: Corâciu N. Iulian (IV: 682, V: 805, 10).

Liceul „Ştirbei-Vodă", Călăraşi.

Clasa a VI-a: Constantinescu D. Petre (VI: 813); Popovici Gh. Doru (VI: 813).

Liceul „Ioniţă Assan", Caracal.

Clasa a VII-a: Barbu A. Ioan (VII: 732, 5, 6, 45, 7, 8, VIII: 667, 8, E. G.: 568, 9, 72, 3, 9, 80, 1, 8, 90, 6); Grigore A. Gheorghe (VII: 735, 6, 7, 45, 6, 7, 8, 9, 51, VIII: 668, E. G.: 568, 9, 73, 9, 80, 1, 96, 7, 8, 600).

Liceul Militar „Regele Ferdinand I", Chişinău.

Clasa a V-a: Panait Ionel (V: 812).
Clasa a VII-a: Gogoaşe Sever (VII: 743, 4),

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanţa.

Clasa a IV-a: Ioanidi A. Aristotel (IV: 679, 80, 1, 4).
Clasa a VII-a: Cuşuţă H. Horia (VII: 732, 4, 5, 6, 7, 8).
Clasa a VIII-a: Ghergic H. Gheorghe (VIII: 656, 8, 9, 63, 4, 5).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a III-a: Bucaleţ Tatiana (III: 245).
Clasa a IV-a: Lungu I. Dorina (IV: 680, 1, 2).
Clasa a VII-a: Petroşanu G. Ligia (VII: 740); Popovici I. Ileana-Verona (VII: 732, 9, 40, 2, 3, 4).

Colegiul Naţional „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Dumitrescu A. Paul (V: 805, 6, 8); George M. Nicolae (V: 805, VI: 812, 3, 4, 7, VII: 732, 3, 4, 5, 6, 44, E. G.: 573, 80).

Liceul „Radu Negru", Făgăraş.

Clasa a VII-a: Tutar A. (E. G.: 569).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa a III-a: Didilescu Traian (III: 242); Georgescu I. Dan (III: 239); Iorga N. Radu (III: 239).

Clasa a IV-a: Anton C. Aurel (IV: 680); Bosinceanu P. Pavel (IV: 680, 1, V: 807); Chiriac I. Mircea (IV: 682); Ciobanu Iosif (IV: 680, 1, V: 807); Crivăţ C. Gheorghe (IV: 680); Dabija D. Paul (IV: 680, 1); Drăghicescu P. Constantin (IV: 680, 1, 2, V: 807, 10); Enăchescu V. Teodor (IV: 686); Filip V. Ioan (IV: 680, 1, 2, V: 807); Fogel D. Gheorghe (IV: 680, 1); Gongu I. Răducanu (IV: 680); Huideş N. Alexandru (IV: 680, 1, 2, V: 807); Melinte N. Liviu (IV: 680); Nichita I. Constantin (IV: 680); Platon C. Florin (IV: 680); Tofan C. Aurel (IV: 680, 1, V: 807); Vlad N. Radu (IV: 680); Vlad N. Mircea (V: 812, 5).

Clasa a VI-a: Bârzescu Mircea (VI: 813, 25, 6, 7, E. G.: 575, 6, 7, 8, 93); Ciumaşu Viorel (VI: 813); Ciureanu G. Constantin (VI: 813, E. G.: 577); Nache D. Dumitru (VI: 808, 9, 10, 3, VII: 723); Şerban C. Nicolae (VI: 813).

Clasa a VIII-a: Andrei C. Aurel (VIII: 664); Vasiliu G. Dumitru (VIII: 664).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa a IV-a: Filipescu M. Gheorghe (IV: 680, 1, 2); Ţibichi C. Mihai (IV: 680, 1, 2).

Clasa a V-a: Adrian C. Radu (V: 799); Fulga N. Nicolae (V: 805, 6, 7, 15); Pintilie A. Dan (V: 815).

Clasa a VII-a: Adăscăliţei V. Adrian (VII: 743, 4); Bălan S. Adrian (VII: 744); Chelaru I. Mihai (VII: 743); Moraru T. Mircea (VII: 743); Popa N. Eugen (VII: 736, 7); Verdeş I. Ananie (VII: 733, 4, 43, 8).

Liceul „Petru Rareş", Piatra-Neamţ.

Clasa a VII-a: Burculeţ I. Constantin (VII: 733, 4, 6); Măzăreanu I. Mircea (VII: 736).

Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.

Clasa a VII-a: Hosu T. Iuliu (VII: 733, 4, 5, 7, 8).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa a IV-a: Iosifescu G. Mircea (IV: 687, 8, 9, V: 807); Stavrică Mihai (IV: 682, 4).

Clasa a VI-a: Constantinescu R. Mihai (IV: 822, 5, 6, 7, VII: 743, 5, 6, 7, 8, 9, VIII: 665; E. G.: 583, 5, 7, 8, 9, 90, 1, 2, 3, 8, 9, 601, 2).

Clasa a VII-a: Buzatu D. Corneliu (VII: 734, 6, 43, 7); Manolescu I. Theodor Gheorghe (VII: 743).

Colegiul Național „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a IV-a: Diaconu Gh. Vasile (IV: 679, 80, 1, 2, V: 807); Furtunescu M. Horia (IV: 680, 1, 2, V: 807); Munteanu Ion (IV: 679, 80, 1, 2, V: 807); Popescu L. Ilie (IV: 684); Roșu V. Const. (IV: 679, 80, 1, 2, 4, V: 807); Stănculescu D. Mihai (IV: 684); Stoian I. Dumitru (IV: 679, 80, 1, 2).

Clasa a VII-a: Columbeanu D. Petre (VII: 736, 45, 7, 8, 50, 1, VIII: 668); Marinescu Marinel (VII: 737, 40, 5, 7, 8, 9, E. G.: 569, 76, 9, 80, 1, 3, 8, 9, 93)); Măzăreanu S. Mircea (VII: 733, 4, 5).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuți.

Clasa a VIII-a: Bocancea E. Octavian (VIII: 659, 64).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina-Olt.

Clasa a VII-a: Goguilescu Șt. Iulian (VII: 732, 3, 4, 5, 7, 9, 43, 7).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa a V-a: Panturoiu I. Ioan (V: 806, 15); Voiculescu I. Ioan (V: 806).

Clasa a VII-a: Benga C. Gheorghe (VII: 747, 3, 9, 50, 1), Grămadă C. Gheorghe (VII: 745); Pătrașcu V. Mihail (VII: 742, 3, 9, 51).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VII-a: Giugiulan I. Serghie (V: 733, 9, 42, 3, 5).

Clasa a VIII-a: Gâță G. Gheorghe (VIII: 652, 6, 9, 62, 9, 73, E. G.: 577, 8, 93); Giurconiu G. Mihail (VIII: 664, 8).

Gimnaziul Mixt „Oituz", Târgu-Ocna.

Clasa a IV-a: Antimiu I. Ana (IV: 679, 84); Derviș M. Dimitrie (IV: 680, 1); Dragoș Z. Aritina (IV: 680, 1, 2).

Liceul de fete „Carmen Sylva", Timișoara.

Clasa a VIII-a: Severineanu C. Lucia (VIII: 655, 64, 8).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timișoara.

Clasa a V-a: Dimitru M. Diomed (V: 807).

Clasa a VII-a: Berlovan T. Gheorghe (VII: 733, 4, 5, 6, 8, 9, 42, 3); Corvin P. Ion (VII: 732); Sârbu S. Iancu (VII: 736, 43, 7); Tincu C. Constantin (E. G.: 556, 83, 94, 6, 7, 8, 602).

Clasa a VIII-a: Scumpia A. Marius (VIII: 609, 55, 7).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timişoara.

Clasa a III-a: Bilcea N. Daia (III: 246, 7, 8); Chirilă N. Octavian (III: 243, 7); Rogoz V. Teodor, (III: 246, 7, 51).

Clasa a V-a: Orha Ion (V: 800, 5, 6); Tripşa Iosif (V: 799, 806, 15).

Clasa a VI-a: Cochele I. Livius (VI: 815, 25, 6, E. G.: 577, 8); Filimon F. Ion (VII: 744, 6, 7, E. G.: 577, 93); Gogulescu A. Petre (VI: 813, 25); Iordănescu Virgil (VI: 825); Mărmureanu Gheorghe (VI: 825, 6); Popescu C. Ovidiu (VI: 825); Rogoz V. Ioan (VI: 825, 6, VII: 744, E. G.: 577, 8, 85, 6, 93); Streja N. Iorgu (VI: 825, 6); Teodorescu At. Alexandru (VI: 813, 25); Vrânceanu G. Gheorghe (VI: 825, 6, VII: 745, 7, 8, E. G.: 570, 1, 89, 93, 6, 7).

Clasa a VII-a: Apostoliu Dumitru (VII: 748); Băcaru I. George (VII: 748); Bărboiu C. Grigore (VII: 748); Bencu G. Emilian (VII: 748); Birişteică P. P. (VII: 748); Cârstea D. Marin (VII: 744, 7); Chiriac Vasile (VII: 743, 7); Dinu M. Petre (VII: 746, 7, 8, 9); Dumitrescu T. Ioan (VII: 748); Gliga Tiberiu (VII: 747, 8); Goran V. (VII: 747, 8, 9); Grigorescu I. Ioan (VII: 748); Minciulescu C. Iulian (VII: 748); Moisescu Constantin (VII: 748); Moraru T. Mircea (VII: 726); Mugurel I. Tula (VII: 736, 7); Nălucă Aurelian (VII: 748); Nedelcu Ulpius (VII: 747, 8); Oprea D. Nifon (VII: 743); Popescu I. Barbu (VII: 743, 6, 7, 8, 9); Şerengău Mihai (VII: 736, 47); Stan Aurelian (VII: 743, 7, 8); Ştefan Mihai (VII: 748); Ştefănescu George (VII; 748); Ştefănescu Ştefan (VII: 748); Strati P. Ioan (VII: 743, 6, 7, 8, 9); Tecu P. Traian (VII: 743, 6, 7, 8, 9); Tincu C. Constantin (VII: 737, 45, 6, 7, 8, 9); Vulpescu G. George (VII: 748).

Clasa a VIII-a: Staicu I. Const. (E. G.: 584, 5, 92).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a VII-a: Martin S. Andrei (VII: 743); Roşu S. Andrei (VII: 743).

Liceul teoretic de fete, Turnu-Severin.

Clasa a V-a: Badea G. Angela (V: 807, 10); Budrică E. Eliza (V: 810).

Clasa a VIII-a: Alexandrescu Al. Eva (VII: 644).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a IV-a: Butărăscu I. Constantin (IV: 680, 1, 4).

Clasa a V-a: Anghelescu A. Grigore (V: 805, 7, 10); Moşteoru Angelu Dumitru (V: 810, 12); Muică T. Nicolae (V: 807).

Clasa a VI-a: Aldescu T. Marius (VI: 813, 26); Bocârnea C. Eugen (VII: 813, 25); Braşoveanu D. Gheorghe (VI: 826, VII: 744, 8, E. G.: 577, 80, 1); Caramaliu D. V. (VI: 813); Căumescu C. Constantin (VI: 826, VII: 748); Ionescu P. Aurel (VI: 825, 6, 7, VII: 745, 7, 8); Mănescu G. Mihai (VI: 813); Păşcu C. Mihai (VI: 826); Puicea C. Aristide (VI: 826).

Clasa a VII-a: Cazacu C. Ion (VII: 747, 8); Iordache M. Oprea (VII: 747, 8); Pătăşanu D. Valeriu (VII: 736, 47, 8); Pletea C. State (VII: 736, 47, 8); Procan N. Nicolae (VII: 736, 7, 45, 7, 8, 9).

Clasa a VIII-a: Dumitrescu Gr. Traian (VIII: 659, 64, 72, E. G.: 580, 1); Vlăduţ St. Const. (VIII: 664).

Elevi curs particular.

Clasa a VIII-a: Burileanu O. Sanda (VIII: 671).

EXERCIŢII PROPUSE

Soluţiile exerciţiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Iulie 1944

Clasa a III-a. *Exerc. 255.* In triunghiul ABC fie D mijlocul laturii BC, E mijlocul laturii AC. Paralela din E la AD taie pe BC în F şi BE taie pe AD în G.

Să se arate, că

$$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{DF} \quad ; \quad \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GE}.$$

N. M.

III. 256. Se dă un trapez isoscel ABCD, având $\overline{BC} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AB} = \overline{DC} = c$. Prelungim latura $\overline{CD}$ cu segmentul $\overline{DF} = n$ şi latura $\overline{AB}$ cu segmentul $\overline{BE} = m$ (m şi n fiind două lungimi date). Dreapta EF taie în G şi H respectiv bazele BC şi AD. Să se calculeze raportul ariilor trapezelor ABGH şi CDHG.

Aplicaţie: $m = 15$ cm, $n = 12$ cm, $a = 24$ cm, $b = 18$ cm, $c = 10$ cm.

O. N. Ţ.

III. 257. In cercul de centru O se dau doi diametri perpendiculari $\overline{AA'}$ şi $\overline{BB'}$. Pe OA şi OB se iau punctele M şi N aşa încât $\overline{OM} = \overline{ON}$. Perpendicularele în M şi N pe AA' şi BB' întâlnesc cercul în M' şi N'. Să se arate, că M'N' sau este paralelă cu MN, sau este egală cu latura patratului înscris în cercul O, după ordinea în care se notează punctele M şi N.

Gh. B.

Clasa a IV-a. *Exerc. 695.* In triunghiul ABC, dreptunghic în A, să se găsească un punct M pe cateta AB astfel ca

$$4 \cdot \text{aria ABC} = 5 \cdot \text{aria BMC}.$$

N. M.

IV. 696. Să se găsească un număr de forma $abcc$ în care suma cifrelor este 18 și știind că

$$abcc - acbc = 10 \cdot (cc + 1)$$

$$abcc - acbb = ccc + 1.$$

N. M.

IV. 697. Un paralelipiped dreptunghiu ABCDA'B'C'D' are următoarele dimensiuni: lungimea $\overline{A'B'} = a$, lățimea $B'c' = b$, înălțimea $BB' = 3a + 2b$. Densitatea paralelipipedului este $\frac{b}{a}$.

Să se calculeze:

1°. Suprafața totală a paralelipipedului;

2°. Volumul paralelipipedului;

3°. Diagonala paralelipipedului;

4°. Greutatea paralelipipedului, exprimate cu ajutorul măsurilor a și b.

V. Gh.

IV. 698. Se consideră un triunghiu dreptunghiu $\hat{A}BC$ ($A = 90^0$) ale cărui laturi, măsurate cu unitatea de lungimi aleasă, au măsurile:

$$\overline{AB} = 6x + 23 \quad ; \quad \overline{AC} = 8x - 36 \quad ; \quad \overline{BC} = 10x - 5.$$

1°. Să se afle măsurile celor trei laturi ale triunghiului considerat.

2°. Cunoscând aceste măsuri, să se determine poziția unui punct M pe latura AC, astfel ca paralela MN la AB, cuprinsă în unghiul ACB, să fie egală cu $\overline{MA}$. Prin ce construcție geometrică simplă putem să obținem poziția punctului M pe AC?

V. Gh.

Clasa a V-a. *Exerc. 825.* Ecuaţia

$$x^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\ x + a^2 (b^2 + c^2 + d^2) = 0$$

are rădăcinile sale reale, oricare ar fi a, b, c, d.

N. M.

V. 826. Pe laturile unui paralelogram se construesc patrate în exterior. Să se demonstreze că centrele acestor patrate formează un patrat al cărui centru se confundă cu intersecţia diagonalelor paralelogramului.

GH. B.

V. 827. Fie M un punct mobil pe cercul (O) de diametru $\overline{AB}$. Se duc tangentele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ la cercul cu centrul în M şi tangent la AB. Să se arate, că punctele A', B', M sunt colineare.

GH. B.

V. 828. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$x(1 - y) = y(1 - z) = z(1 - x) = \frac{1}{4}.$$

C. I. Ţ.

V. 829. Să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^2 - 2(m - 1)\,x - (m - 3) = 0,$$

parametrul m variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

Clasa a VI-a. *Exerc. 836.* Să se simplifice expresia

$$\frac{\cos^2 a - 2\cos a\ \cos b\ \cos(a + b) + \cos^2(a + b)}{\cos^2 a + \cos^2(120^0 + a) + \cos^2(120 - a)}.$$

GH. B.

VI. 837. Se numeşte triunghiu automedian, un triunghiu între laturile căruia avem relaţia $\alpha = 0$, unde

$$\alpha = 5a^2 - b^2 - c^2.$$

Fie ABC un triunghiu oarecare; în centrul lui de greutate G ridicăm o perpendiculară $\overline{GO} = \delta = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$. Să se arate, că triunghiul BOC este dreptunghic.

Aplicație la triunghiul automedian.

N. M.

VI. 838. Fie ABC un triunghiu dreptunghic în A.

In A, B, C ridicăm perpendiculare pe planul ABC, de lungime $\overline{AA'} = \alpha$, $\overline{BB'} = \beta$, $\overline{CC'} = \gamma$. Să se calculeze laturile triunghiului A' B' C'. Să se arate, că acest nou triunghiu este dreptunghic dacă

$$(\alpha - \beta)\ (\alpha - \gamma) = 0.$$

Concluzii.

N. M.

VI. 839. Să se rezolve ecuația trigonometrică

$$\cos x + \sin x - (\cos x - 1)\ (\cos x - \sin x) =$$
$$= (2\cos x + \sin x - 1)\ (1 + \sin x - \cos x).$$

I. I. S.

VI. 840. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o înălțime, o mediană și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 841. Două turnuri verticale de înălțimi $\overline{AB} = h$ și $\overline{A'B'} = h' = 64{,}15m$ au bazele pe același plan orizontal. Distanța dintre ele este $\overline{BB'} = d = 82{,}16m$. Din vârful celui de-al doilea turn se vede primul sub un unghiu $BA'A = \alpha = 52^0 18'$.

Să se calculeze înălțimea h a primului turn.

V. GH.

Clasa a VII-a. *Exerc. 759.* Să se reprezinte funcția

$$y = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 - x - 6}}.$$

N. M.

VII. 760. Să se determine maximul volumului unui con circular drept cu aria laterală constantă.

N. M.

VII. 761. Să se determine conul de volum maxim înscris într'un con dat (având vârful în centrul cercului de bază, aceeaşi axă şi sprijinindu-se pe conul dat).

Să se determine conul de volum minim circumscris unui con dat.

Să se facă o apropiere între aceste rezultate.

(Toate conurile sunt presupuse drepte şi circulare).

N. M.

VII. 762. Considerăm un poligon regulat de latură l şi de unghiuri egale α. Prin fiecare vârf ducem o dreaptă făcând cu laturile, în acelaşi sens, unghiuri ascuţite egale cu φ. Se formează în acest mod un nou poligon regulat circumscris. Să se arate, că acest poligon este maxim, când φ este complementar cu jumătatea unghiului α. In acest caz, latura noului poligon este egală cu diametrul cercului circumscris poligonului dat.

N. M.

VII. 763. Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = a - \frac{e^x}{x}$$

considerând cazurile $a > 0$ ($a > e$, $a = e$, $a < e$) ; $a = 0$; $a < 0$. Din reprezentare să se deducă, pentru toate cazurile, numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$\frac{e^x}{x} + m - a = 0,$$

a rămânând o constantă, iar m variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

VII. 764. Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = e^{-x^2+1} + x^2 - 1.$$

Să se deducă natura rădăcinilor ecuaţiei

$$e^{-x^2+1} + x^2 - 1 - m = 0,$$

parametrul m variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

VII. 786 *). Fiind date funcţiile

$x = f(u) = u - e^u$; $y = \varphi(u) = u + e^u$; $z = \varphi(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$,

să se arate, că $\varphi'_u(x, y)$ se anulează numai pentru o singură valoare a lui u cuprinsă în intervalul $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

V. Gh.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 684.* Punctul M descrie parabola $y^2 = 2px$. Tangenta în M taie axele în T şi U. Fie N punctul, care se proiectează pe axe în T şi U. Să se arate, că N descrie tot o parabolă de parametru $-\frac{p}{4}$.

N. M.

VIII. 685. O paralelă Δ la axa netransversă taie o iperbolă în punctele M şi N. Paralelele duse prin M şi N la una din asimptote taie axa netransversă în P şi Q. Să se demonstreze, că, dacă O e centrul curbei avem

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \text{const.},$$

când Δ variază.

G. D. S.

VIII. 686. M fiind un punct al unei iperbole, O centrul iperbolei şi F_1, F_2 focarele, să se arate că

$$\overline{OM}^2 - \overline{MF_1} \cdot \overline{MF} = a^2 - b^2.$$

Particularizare la iperbola echilateră.

G. D. S.

---

*) Deoarece numerele 765—785 au fost date din eroare în Vol. VIII se trece la Nr. 786, după cum s'a arătat în nota dela pag. 12, Vol. IX.

VIII. 687. Se dă o parabolă, un punct A pe axa ei şi dreapta D perpendiculară pe axă, trecând prin simetricul lui A faţă de vârf. Tangenta într'un punct M al parabolei taie dreapta D în N. Să se afle locul intersecţiei dreptei MA cu paralela dusă prin N la axa parabolei, când M descrie parabola dată.

G. D. S.

VIII. 688. Să se rezolve ecuaţia

$$2x^4 - 16x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0 \quad (E)$$

şi să se determine parametrii ştiind că ecuaţia admite rădăcina

$$x = \frac{1}{2}(1 - i), \text{ unde } i = \sqrt{-1}.$$

2°. Fie P punctul, care în raport cu sistemul ortogonal (Ox, Oy) are drept coordonate rădăcinile reale ale ecuaţiei (E) luate în ordine descrescătoare. Să se scrie ecuaţia iperbolei echilatere, care are axele Ox, Oy ca axe de simetrie şi trece prin P. Să se scrie apoi ecuaţia tangentei şi normalei în P la acea iperbolă.

3°. Fie încă un punct Q variabil pe iperbolă, apoi Q_1, Q_2 proiecţiile lui Q pe asimptotele iperbolei. Să se arate, că oricare ar fi poziţia lui Q pe iperbolă, aria patrulaterului CQ_1QQ_2 este constantă

V. Gh.

VIII. 689. Ecuaţiile

$$195\,(\Sigma a^2).x^3 \pm 42\,(\Sigma a\alpha)\,x^2 + 4\,(\Sigma\alpha^2).x + \lambda = 0 \quad (I)$$

$$2845\,(\Sigma a^2)\,x^5 \pm 110\,(\Sigma a\alpha)\,x^3 + 2\,(\Sigma\alpha^2).x + \lambda = 0 \quad (II)$$

$$119\,(\Sigma a^2).x^7 \pm 14\,(\Sigma a\alpha)\,x^4 + (\Sigma\alpha^2).x + \lambda = 0 \quad (III),$$

sunt ecuaţii cu o singură rădăcină reală, oricare ar fi parametrii $a, \alpha, b, \beta, \ldots, \lambda$.

O. N. Ţ.

VIII. 690. Să se studieze natura rădăcinilor ecuaţiei

$$(3n+1)\,(\mu^2+1)\,(\Sigma a_i^2).x^{3n+1} + 2\,(n+1)\,(3n+1)\,\mu\,(\Sigma a_i\alpha_i)\,x^{2n+1} + \\ + (n+1)\,(2n+1)^2\,(\Sigma\alpha_i^2).x^{n+1} + \lambda = 0,$$

unde $a_i, \alpha_i, \lambda, \mu$ sunt parametrii arbitrari.

O. N. Ţ.

VIII. 691. Să se studieze natura rădăcinilor ecuației

$$abx^{n+p+1}+(n+p+1)\,a\beta x^{n+1}+b\alpha x^{p+1}+(n+1)(p+1)\alpha\beta x+\lambda=0,$$

unde $a, b, \alpha, \beta, \lambda$ sunt parametri, iar n și p numere întregi pozitive.

O. N. Ț.

Exerciții Generale. *Exerc. 613.* Să se determine un număr de forma 1 * * 4, știind că el admite o desfacere în factori primi de forma $a^b \cdot b^{a+b}$.

N. M.

E. G. 614. Să se găsească valorile numărului întreg n pentru care

$$n \cdot 10^{2n-1} - 1$$

se divide cu 17.

GH. B.

E. G. 615. Să se arate, că numărul

$$\begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 1 & 100 & 10 \\ 10 & 1 & 100 \end{vmatrix}$$

este patrat perfect.

GH. B.

E. G. 616. Intrebuințând câte o *singură dată* pe fiecare din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9, să se formeze două numere de câte cinci cifre, a căror sumă să fie un număr de cinci cifre egale între ele.

GH. B.

E. G. 517. Să se rezolve ecuația

$$x^2+y^2-4(x+y)+396=0$$

în numere întregi.

GH. B.

E. G. 618. Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din șirul primelor x numere, atunci pentru $M \geqq 2$, avem

$$I_N(M) < N-1.$$

I. L.

E. G. 619. Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din şirul numerelor până la x, şi A are mai mulţi factori primi ca B, atunci

$$I_N(A) < I_N(B).$$

I. L.

E. G. 620. Dacă d_i reprezintă divizorii lui N, atunci

$$\Sigma \varphi\left(\frac{N}{d_i}\right) = N.$$

I. L.

E. G. 621. Dacă $I_x(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din şirul natural al numerelor până la x şi dacă $I_{a\to b}(y)$ reprezintă numărul numerelor prime cu y din intervalul de numere consecutive dela a la b, atunci avem

$$I_{100}(10) + I_{1000}(10)] \times I_{100-10000}(10) = (100^2 - 10^2) \cdot [\varphi(10)]^2.$$

I. L.

E. G. 622. Dacă $\varphi_x(y)$ reprezintă indicatorul de ordinul x al lui y, atunci avem

$$a^{\varphi_m(n)} - 1 = \mathcal{M}.\varphi_{m-1}(n),$$

a fiind nedivizibil cu $\varphi_{m-1}(n)$.

I. L.

RATĂ. 1°. La exerc. clasa VIII 644, propus la pag. 29 din acest an, abscisa lui C este $\frac{+4+3\sqrt{3}}{2}$ în loc de $\frac{+4+3\sqrt{2}}{2}$.

2°. La exerc. clasa VIII 648, propus la pag. 30 din acest an, primele două ecuaţii sunt

$$x - y + 2 = 0 \quad \text{în loc de} \quad x - y + z = 0$$
$$3x - y + 1 = 0 \quad \text{în loc de} \quad 2x - y + 1 = 0.$$

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 şi 4 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

In Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. . . Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 23.493

1943-44

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 8—9 1 MAI 1944

BIBLIOTECA CENTRALĂ
ASOCIAŢIUNII
SIBIIU

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIŢEI, 158. BUCUREŞTI 2. — TELEFON 7-3809

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL X. No. 8—9 1 MAI 1944

ABONAMENTUL LEI 200 PE AN (9 numere)

Soluţii şi orice corespondenţă pe adresa:

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

INŞTIINŢARE

Din cauza închiderii cursurilor şcoalelor secundare şi din cauza evenimentelor în curs, suntem nevoiţi a opri deocamdată apariţia *Suplimentului cu Exerciţii*, însă pentru ca abonaţii noştri să aibă acelaşi material de exersat, ca şi în anii trecuţi, scoatem numărul de faţă ca pe un număr dublu.

Vom anunţa la timp în *Gazeta Matematică* la ce dată va începe să apară vol. XI al Suplimentului.

REDACŢIA.

EXERCIŢII REZOLVATE

Exerciţii Generale. *Exerc. 535. Să se arate că dacă* N *are* 3 *factori primi, atunci:*

$$\varphi(N) > \frac{1}{4} . N,$$

unde $\varphi(N)$ *este indicatorul lui* N.

I. L.

$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma}$, atunci:

$$(a-1)(b-1)(c-1) > \frac{a . b . c}{4}.$$

Presupunem $a = 2$, atunci:

$$(b-1)(c-1) > \frac{b . c}{2}.$$

Dar cum $2 > \overline{1,4}^2$ urmează că trebue să avem neapărat: $b - 1 > \frac{b}{1,4}$, căci dacă $c > b$ vom avea dela sine și $c - 1 > \frac{c}{1,4}$.

Deducem deci că $b > 3$. Dar pentru $b = 3$ avem: $2 . (c - 1) > \frac{3}{2} . c$ care este adevărată pentru $c \geqslant 5$.

Presupunem acum că $a \geqslant 3$, atunci observăm că: $4 > \overline{1,5}^3$, deci trebue să avem: $a - 1 > \frac{a}{1,5}$ sau $a > 3$. Pentru cazul când $a = 3$ avem:

$$2 . (b - 1) . (c - 1) > \frac{3 . b . c}{4}.$$

Dar cum $c > b > a$, urmează că $c > b > 3$ și prin urmare:

$$2 = \frac{3}{1,5} \; ; \; (b - 1) > \frac{b}{1,5} \quad \text{și} \quad (c - 1) > \frac{c}{1,5}.$$

Produsul lor ne arată neegalitatea. Neegalitatea va fi deci valabilă pentru oricari alte valori mai mari.

In general avem:

$$\varphi(N) > \frac{N}{n + 1}$$

unde n este numărul factorilor primi ai lui N.

In adevăr am:

$$\varphi(N) = N . \frac{\pi(a - 1)}{\pi a}$$

urmează că:

$$(n + 1) . \pi(a - 1) > \pi a.$$

Am văzut însă că pentru $n = 1, 2, 3$ neegalitatea este adevărată, atunci dacă ea este valabilă pentru n, va fi și pentru $(n + 1)$, adică vom avea și:

$$(n + 2) . (p - 1) . \pi(a - 1) > p . \pi a$$

unde p este factorul imediat superior factorilor lui N.

Dacă admitem într'un caz defavorabil că: $\pi a = (n+1).\pi(a-1)$, atunci trebue să avem:

$$(n+2)(p-1) > p(n+1)$$

sau: $p > n+2$.

Cu alte cuvinte factorul p va fi mai mare ca numărul factorilor primi plus 2.

In adevăr, fie $p_1, p_2 \ldots p_n$ un număr de n factori primi consecutivi, atunci $p_{n+1} > n+2$, căci dacă cele n numere ar fi naturale, atunci $p_n = n$, iar $p_{n+1} \geqslant n+2$, căci două numere prime nu pot fi consecutive. Or, dacă în cazul numerelor naturale consecutive avem $p_{n+1} \geqslant n+2$, în cazul numerelor prime consecutive vom avea cu atât mai mult $p_{n+1} > n+2$.

Până la 1 Aprilie 1944 s'au primit soluții bune dela:

Liceul „Elena Ghiba Birta", Arad.

Clasa a V-a: Păcuraru I. Doina (V: 820, 1), Stănijan S. Olimpia (V: 820, 1).

Clasa a VI-a: Munteanu Margareta (VI: 818, 9).

Liceul „Moise Nicoară", Arad.

Clasa a V-a: Suciu I. Petru (V: 820).

Clasa a VII-a: Opriș G. Constantin (VII: 742).

Liceul de fete, Beiuș-Bihor.

Clasa a III-a: Chiriloiu A. Ruxandra (III: 243); Mocuța G. Lucreția (III: 246); Popa I. Eva (III: 246).

Clasa a VII-a: Cosma L. Xenia (VII: 733, 4, 5, 42, 3, 4); Mărăcineanu P. Elena (VII: 733, 4, 5); Popa D. Ileana (VII: 733, 4, 5); Popovici P. Maria (VII: 733, 4, 5).

Liceul „Samuil Vulcan", Beiuș-Bihor.

Clasa a V-a: Chirilă A. Radu (V: 820, 1); Mochnacs Mihai (V: 820, 1).

Clasa a VI-a: Cosma L. Gavril (VI: 818, 9); Costea D. Florian (E. G.: 602).

Clasa a VII-a: Hodișan Florian (VII: 750, 1, 7; E. G.: 592); Ilea I. Vasile (VII: 743, 50, 7); Logofătu M. Tănase (VII: 750, 1); Maliță Mircea (VII: 757); Popa D. Vasile (VII: 750, 1, 7).

Clasa a VIII-a: Drimba E. Iosif (VIII: 660, 78, 9, 80, 1, 2, 3).

Liceul „Sf. Vasile", Blaj.

Clasa a VII-a: Maliță Mircea (VII: 754).

Liceul „N. Bălcescu", Brăila.

Clasa a VII-a: Beșchea I. Radu (VII: 751); Fancioti E. Silvio (VII 733, 4, 5, 8, 42).

Clasa a VIII-a: Marin Th. Mircea (VIII: 653).

Liceul „Dr. Ion Meșotă", Brașov

Clasa a V-a: Daniș I. Ioan (V: 820); Ionescu Șt. Ioan (V: 820).

Clasa a VIII-a: Nistor V. Horia (VIII: 653, 61).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa a IV-a: Bărbulescu Ligia (IV: 684).

Clasa a V-a: Dimitrescu N. Florica (V: 820); Iacolov Nadia (V: 815); Moșoianu Cesarina (V: 815); Popescu Teodora (V: 815).

Clasa a VII-a: Stoenescu Felicia (VII: 739, 42, 3); Vasilescu Mariana (VII: 739, 42).

Liceul de fete „Iulia Hașdeu", București.

Clasa a VII-a: Pașolescu N. Ortansa (VII: 739, 40, 3, 50, 2, 3, 7).

Institutul „Sf. Maria", București.

Clasa a V-a: Prassa G. Sanda (V: 808, 20, 1).

Liceul „Aurel Vlaicu", București.

Clasa a V-a: Eremia I. Mihail (V: 820, 1).

Clasa a VI-a: Barbaiani A. Mihai (VI: 812, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 3; VII: 733, 42, 3, 4; E. G.: 573); Diaconu C. Constantin (VI: 814, 5, 6, 7); Leon A. Mihai (VI: 812, 4, 5, 6, 7; VII: 733; E. G.: 573).

Liceul „Matei Basarab", București.

Clasa a VI-a: Mărgăritescu C. Mihai (VI: 819, 31, 4).

Clasa a VII-a: Muntz M. Eduard (VII: 742, 3, 4; VIII: 653, 60; E. G.: 588, 9).

Clasa a VIII-a: Antonescu D. Eugen (VIII: 660, 1, 8, 73, 7, 8, 9, 80, 1, 2, 3); Mateescu N. Dinu (VIII: 652, 3, 60, 1, 3, 8, 70); Popescu N. Ștefan (VIII: 653).

Liceul „Cantemir Vodă", Bucureşti.

Clasa a V-a : Chiriţă I. Ioan (V : 820).

Liceul „Gheorghe Lazăr", Bucureşti.

Clasa a VII-a : Costescu L. Lucian (VII : 734) ; Iacobescu A. Constantin (VII : 733, 4, 5) ; Temelcu N. Cezar (VII : 734, 5).

Clasa a VIII-a : Nistor Gh. Gheorghe (VIII : 652, 3) ; Timotin Al. Alexandru (VIII : 660, 1, 2, 5, 8, 9, 70, 1, 2, 4, 6).

Liceul „Sf. Andrei", Bucureşti.

Clasa a VI-a : Chiraleu Ioan (VI : 819, 21, 2, 3, 31).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa a VII-a : Leţia L. Valentin (VII : 733, 4, 5, 8) ; Mihăilescu C. Eugen (VII : 738).

Liceul „Spiru Haret", Bucureşti.

Clasa a VIII-a : Prassa Gh. Constantin (VIII : 653, 60, 1).

Liceul „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa a V-a : Cojocaru I. Anatolie (V : 820, 1) ; Doneaud E. André (V : 820, 1) ; Grigore G. Vasile (V : 820) ; Haret Sp. Radu (V : 733, 820 1) ; Rasidescu Marius (V : 821).

Clasa a VI-a : Ardare N. Nicolae (V : 816, 7, 20, 31, 2) ; Seni Gh. Dinu (V : 810).

Clasa a VII-a : Cantuniar I. Cristu (VII : 730, 9, 42 ; VIII : 668) ; Corbaru Vlad (VII : 757) ; Mustăcescu V. Traian (VII : 725, 33, 4, 8).

Clasa a VIII-a : Manasian M. Dragoş (VIII : 653, 60, 1, 3, 7, 76).

Liceul „Gheorghe Şincai", Bucureşti.

Clasa a VII-a : Daniilescu C. Constantin (VII : 733, 5, 8, 9, 40, 1, 2, 3, 4).

Colegiul Naţional „Sf. Sava", Bucureşti.

Clasa a VI-a : Săvescu A. Mircea (VI : 816).

Clasa a VII-a : Mateescu N. Dinu (VII : 680) ; Mihail Alexandru (VII : 743, 4).

Liceul „Ioniță Assan", Caracal.

Clasa a V-a: Ciocoiu I. Ștefan (V: 800).

Clasa a VI-a: Stroescu I. Florea (VI: 818, 9, 22).

Clasa a VII-a: Barbu A. Ioan (VII: 752, 7, 8; VIII: 653; E. G.: 585, 8, 9, 604, 6); Grigore A. Gheorghe (VII: 752; VIII: 653; E. G.: 604).

Liceul Militar „Ștefan cel Mare", Cernăuți-Timișoara.

Clasa a IV-a: Dinuț Traian (V: 820; E. G.: 573); Matache Gheorghe (V: 820).

Clasa a V-a: Lăzărescu M. Radu (V: 820).

Clasa a VI-a: Constantinescu Emil (VI: 815, 8, 9; E. G.: 573); Crișan Anton (VI: 815; E. G.: 573); Grigoraș Gheorghe (VI: 815, 8, 9; E. G.: 573); Marinescu Stelian (VI: 815, 8, 9, 22, 31; E. G.: 573); Nicolescu C. Corneliu (VI: 831); Popescu M. Stelian (VI: 815, 8, 9, 24; E. G.: 573).

Clasa a VII-a: Damian V. Corneliu (VII: 739, 42, 3, 4); Lumiescu Dumitru (VII: 739, 42, 3); Nicolescu T. Viorel (VII: 739, 42, 3, 4); Prisecaru Mircea (VII: 739, 42, 4); Sintescu V. Mihai (VII: 739, 42, 3, 4).

Clasa a VIII-a: Balaș D. Ovidiu (VIII: 676); Bărbulescu Ștefan (VIII: 661); Cimbru Mihai (VIII: 660, 1, 76); Dumitrescu V. Ioan (VIII: 676); Nicolescu T. Ioan (VIII: 660, 1, 76); Staicu I. Constantin (VIII: 661, 76); Tănase G. (VIII: 661).

Liceul „Alecu Russo", Chișinău.

Clasa a VII-a: Gogoașe Sever (VII: 739, 42, 50, 1).

Clasa a VIII-a: Filoneanu M. Leonida (VIII: 653).

Liceul „Mircea cel Bătrân", Constanța.

Clasa a VIII-a: Gheorghie H. Gheorghe (VIII: 653, 60, 1).

Liceul de fete „Elena Cuza", Craiova.

Clasa a III-a: Bucaleț Fl. Tatiana (III: 243).

Clasa a VI-a: Dobrotescu O. Constanța (VI: 819); Grămescu R. Zenovia-Anthuza (VI: 814, 6, 7).

Clasa a VII-a: Ștefan Elena (VII: 734).

Colegiul Național „Carol I", Craiova.

Clasa a V-a: Dumitrescu A. Paul (V: 815, 21); George M. Nicolae (VI: 816).

Liceul Militar „D. A. Sturdza", Craiova.

Clasa a III-a: Ștefănescu I. Sofronie (III: 246, 7).

Clasa a VII-a: Popa Al. Nicolae (VII: 733, 4, 42).

Liceul „Oltea Doamna", Iaşi.

Clasa a VI-a: Albu D. Aurelia (VI: 815, 6, 7, 8, 9, 21, 8).

Liceul Militar, Iaşi.

Clasa a VI-a: Bârzescu Mircea (VI: 812, 5, 7, 21; VII: 733; E. G.: 573); Ciumaşu Viorel (VI: 815, 8, 9, 21); Ciureanu Gh. Constantin (VI: 815, 7, 21; VII: 733; E. G.: 573); Nache D. Dumitriu (VI: 812, 5, 7, 8, 9; VII: 733; E. G.: 573); Şerban C. Nicolae (VI: 812, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 21; E. G.: 573).

Clasa a VII-a: Ignat Gh. Mircea (VII: 743).

Clasa a VIII-a: Andrei Gh. Aurel (VIII: 661); Vasiliu Gh. Dumitru (VIII: 661).

Liceul Internat, Iaşi.

Clasa a VII-a: Adăscăliţei V. Adrian (VII: 742); Chelaru I. Mihai (VII: 742, 4); Popa N. Eugen (VII: 739, 42, 50; VIII: 668).

Liceul „I. C. Brătianu", Piteşti.

Clasa a VII-a: Hossu T. Iuliu (VII: 739, 42).

Liceul „Sf. Petru şi Pavel", Ploieşti.

Clasa a IV-a: Iosifescu G. Mircea (IV: 686, 8; V: 820, 1; E. G.: 604); Stavrică Mihai (IV: 688, 92, 4; V: 820, 1; E. G.: 604).

Clasa a VI-a: Constantinescu R. Dumitru-Mihai (VI: 816, 21).

Clasa a VII-a: Manolescu I. Gheorghe (VII: 747).

Colegiul Naţional „N. Filipescu", Predeal.

Clasa a V-a: Badea Mihai (V: 819, 20, 1); Progreseanu Al. Al. (V: 819, 20, 1); Rădulescu Dan (V: 819, 20, 1).

Clasa a VII-a: Columbeanu D. Petre (VII: 744, 52, 3, 6, 7, 8; E. G.: 596, 7, 8, 602).

Liceul „Eudoxiu Hurmuzachi", Rădăuţi.

Clasa a VIII-a: Bogancea E. Octavian (VIII: 661); Ursachi I. Octavian (VIII: 653).

Liceul „Gh. Lazăr", Sibiu.

Clasa a VII-a: Coman Alexandru (VII: 742).

Gimnaziul „Principele Nicolae", Sinaia.

Clasa a IV-a: Profireanu Gh. Dan (IV: 687).

Liceul de fete Slatina.

Clasa a VII-a: Zeveleanu Gh. Constanța (VII: 739, 40).

Liceul „Radu Greceanu", Slatina.

Clasa a VII-a: Goguilescu St. Iulian (VII: 738, 9).

Liceul „Enăchiță Văcărescu", Târgoviște.

Clasa a VII-a: Pătrașcu V. Mihai (VII: 756, 7).

Liceul „Tudor Vladimirescu", Târgu-Jiu.

Clasa a VII-a: Giugiulan I. Serghie (VII: 738).

Clasa a VIII-a: Gâță Gh. Gheorghe (VIII: 653, 4, 60, 1, 2, 3, 6, 7; E. G.: 604); Giurconiu Gh. Mihai (VIII: 653, 60, 6).

Liceul „C. Diaconovici-Loga", Timișoara.

Clasa a VII-a: Coroiu P. Ioan (VII: 733, 5, 8); Tincu C. Constantin (VII: 751, 2).

Clasa a VIII-a: Scumpia A. Marius (VIII: 652, 3).

Liceul Militar „Mihai Viteazul", Timișoara.

Clasa a III-a: Pană Gh. Romulus (VIII: 243); Rogoz V. Teodor (III: 243).

Clasa a V-a: Chiriac N. Paul (V: 821); Costache M. Nicolae (V: 820); Orha Ion (V: 808, 12); Tripșa I. Iosif (V: 808, 12, 20).

Clasa a VI-a: Cochela I. Livius (VI: 830, 1, 2, 4; VII: 746); Filimon Fl. Ioan (VI: 815, 6, 30; VII: 734, 5; VIII: 668, 749); Ionescu A. Florin (VI: 815, 6, 30); Iordănescu Virgil (VI: 815); Mărmureanu Gh. (VI: 818); Popescu C. Ovidiu (VI: 815, 6, 31, 2, 4); Rogoz V. Ioan (VI: 816, 21, 2, 3, 31, 2, 4; E. G.: 584, 90, 1, 6, 602, 4, 6, 10, 2); Streja N. Iorgu (VI: 812, 5, 7, 8; VIII: 668): Vrânceanu G. Gheorghe (VI: 820, 2, 3, 8, 31, 2, 3, 4; VIII: 668; E. G.: 583, 604, 6, 10).

Clasa a VII-a: Apostoliu Dumitru (VII: 739, 40, 2); Bancu Gh. Emilian (VII: 740, 2); Birișteică P. P. (VII: 739, 40, 2); Chiriac Vasile (VII: 740, 50); Dinu M. Petre (VII: 733, 4, 5, 8); Dumitrescu T. Ioan (VII: 740); Govan Valeriu (VII: 741, 51); Minculescu C. Iulian (VII: 739); Moisescu Constantin (VII: 739, 40, 2); Nedelcu Ulpius (VII: 739, 40, 2); Pavica Victor (VII: 740): Popescu I. Barbu (VII: 738, 9, 42, 4; VIII: 668; E. G.: 595); Stan Aurelian (VII: 739, 40, 2); Ștefănescu George (VII: 739, 40, 2); Ștefănescu Ștefan (VII: 739, 40, 2); Strati P. Ioan (VII: 739, 40, 2, 50, 1); Țecu P. Traian (VII: 738, 9, 42, 50).

Liceul „Sf. Haralambie", Turnu-Măgurele.

Clasa a III-a: Pleșu Sp. Bucur (III: 243, 4, 6, 7).

Clasa a VII-a: Martin D. Constantin (VII: 734, 5, 8, 9, 42, 3); Roșu St. Andrei (VII: 738, 42).

Liceul de fete, Turnu-Severin.

Clasa a V-a: Budrică E. Eliza (V: 820, 1, 4).
Clasa a VII-a: Firoiu I. Maria (VII: 739, 40, 2, 3, 4, 51, 7).
Clasa a VIII-a: Alexandrescu Al. Eva (VIII: 653, 61).

Liceul „Traian", Turnu-Severin.

Clasa a III-a: Margine Mihai (III: 243): Sgândăr Sebastian (III: 247).
Clasa a IV-a: Ciortan C. Petre (IV: 684, 7); Tunsoiu M. Dumitru (IV: 684); Țurai Gh. Constantin (IV: 684).
Clasa a V-a: Ioanițescu Gh. Pompiliu (V: 805, 8, 21); Stroescu I. Sabin (V: 820, 1).
Clasa a VI-a: Aldescu T. Marius (VI: 814, 6, 7, 8, 31, 2, 4); Bocârnea C. Eugen (VI: 814, 6, 8, 22); Brașoveanu D. Gheorghe (VI: 820, 8, 9; VIII: 660, 8; E. G.: 593, 604); Comuescu C. Constantin (VI: 816); Ionescu P. Aurel (VI: 828); Mănescu Gh. Mihalache (VI: 816, 8; VIII: 668); Nicolicioiu L. Ioan (VI: 832); Pârșan C. Mihai (VI: 812, 6, 7, 8, 21, 2, 34); Puicea Em. Aristide (VI: 812, 6, 7, 8); Vișan D. Mihai (VI: 628, 818, 9, 21, 2).
Clasa a VII-a: Achimescu-Brâgleasa Gheorghe (VII: 751); Caravias P. Nicolaos (VII: 734); Petășeanu D. Valeriu (VII: 751); Păuță I. Gheorghe (VII: 751); Pletea State (VII: 751); Săbiescu Stelian (VII; 751); Smeu D. Cornel (VII: 742, 3, 4); Trocan N. Nicolae (VII: 752, 7; E. G.: 604).
Clasa a VIII-a: Dumitrescu Gh. Traian (VIII: 668, 9); Vlăduț St. Constantin (VIII; 668).

Pregătiți în particular.

Clasa a VIII-a: Burileanu O. Sanda (VIII: 680, 1, 3).

EXERCIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Octombrie 1944

Clasa a III-a. *Exerc. 258.* Fie ABCDEF exagonul regulat înscris în cercul (O) și $\overline{OI}$, $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ razele perpendiculare respectiv pe laturile CB, AF, ED. Să se arate că triunghiul IKL are laturile sale paralele cu celelalte trei laturi BA, FE, DC ale exagonului regulat.

2°. Să se calculeze aria comună exagonului ABCDEF și triunghiului IKL, știind că raza cercului (O) este de 14 cm.

3°. Să se calculeze aria poligonului ABICDLEFK.

O. N. Ț.

III. 259. Fie ABCDEF un exagon regulat înscris în cercul dat (O), iar G intersecția laturilor BA, EF.

Să se arate: *a)* Dreptele AD, CG, BF se întâlnesc în același punct.

b) Dreapta CG împarte latura AF în raportul $\frac{\overline{AL}}{\overline{LF}} = \frac{1}{3}$.

c) Să se găsească, fără a calcula aria triunghiului BAL, raportul acestei arii către aria exagonului ABCDEF.

d) Să se găsească lungimea segmentului CG, unitatea fiind raza cercului (O).

e) Să se găsească asemenea lungimea segmentului GL.

O. N. Ț.

III. 260. Fie exagonul regulat ABCDEF înscris în cercul dat (O); apoi G, H, I intersecțiile (DE, AF), (FA, CB), (BC, DE); $\overline{GL}$, HM, $\overline{IN}$ tangentele duse din G, H, I la cercul (O). Să se arate:

a) Că tangenta dusă dintr'un vârf al triunghiului GHI la cercul (O) este egală cu latura patratului înscris în cercul (O).

b) Că cercurile (G, $\overline{GL}$); (H, $\overline{HM}$); (I, $\overline{IN}$) respectiv cu centrele în G, H, I și cu razele $\overline{GL}$, $\overline{HM}$, $\overline{IN}$ sunt două câte două exterioare unul altuia.

O. N. Ț.

III. 261. Fie exagonul regulat ABCDEF înscris în cercul (O) și G intersecția laturilor AF, DE; fie $\overline{GH}$, $\overline{GH'}$ tangentele duse din G la cercul (O). Să se calculeze *lungimea coardei* $\overline{HH'}$ a punctelor de contact ale celor două tangente și *distanța* ei la punctul G, unitatea de măsură fiind raza cercului (O).

O. N. Ț.

III. 262. Fie ABCD un patrat înscris în cercul dat (O); E, F, G, H respectiv mijloacele laturilor BC, CD, DA, AB; A', B', C', D' intersecțiile (AE, BF), (BF, CG), (CG, DH), (DH, AE). Să se arate că patrulaterul A'B'C'D' este un patrat.

O. N. Ț.

III. 263. Fie ABCDEF un exagon regulat înscris în cercul (O) şi G, H, I, K, L, M respectiv mijloacele laturilor CD, DE, EF, FA, AB, BC; A', B', C', D'. E', F' intersecţiile: (AG, BH), (BH, CI), (CI, DK), (DK, EL), (EL, FM), (FM, AG).

Să se arate că exagonul A'B'C'D'E'F' este un exagon regulat.

O. N. Ţ.

Clasa a IV-a. *Exerc. 699.* In cercul (O) de rază R înscriem exagonul regulat ABCDEF şi însemnăm cu G intersecţia laturilor AF, DE, iar cu H, H' punctele de contact ale tangentelor duse din G la cercul (O).

Se roteşte întreaga figură în jurul diametrului OG; punctul H descrie un cerc (H) tras pe sfera înnăscută de cercul (O). Să se calculeze:

a) Suprafaţa şi volumul conului cu vârful în G şi cu baza cercul (H).

b) Suprafaţa laterală şi totală a trunchiului de con având ca baze cercurile cu diametrele $\overline{AD}$ şi $\overline{HH'}$.

O. N. Ţ.

IV. 700. Să se verifice identitatea

$$2(x-y-2)(x-y-1)-2y(x-3)(x-y-1)$$
$$+y(y-1)(x-3)(x-2)=(x-1)(x-2)(y-1)(y-2).$$

N. M.

IV. 701. Să se rezolve ecuaţia

$$(x-4)(x-5)-(x-1)(x-2)=3[(x-3)(x-4)-(x-2)(x-3)].$$

N. M.

IV. 702. Se consideră o prismă triunghiulară dreaptă ABCA'B'C', având $\sphericalangle BAC = 90^0$.

Să se demonstreze relaţia

$$(\text{aria } BCC'B')^2 = (\text{aria } ABB'A')^2 + (\text{aria } ACC'A')^2.$$

V. Gh.

IV. 703. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 + 71 = (2x+3)(2y+1).$$

V. Gh.

IV. 704. Dacă

$$a^2c + b^2a + c^2b = 2abc,$$

să se arate, că

$$\frac{a(1-b+c)}{b(1-c+a)} + \frac{b(1-c+a)}{c(1-a+b)} + \frac{c(1-a+b)}{a(1-b+c)} = 3.$$

C. I. Ţ.

IV. 705. Dacă

$$a(1-b) = b(1-c) = c(1-a),$$

să se arate că

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{1-a}{1-c} + \frac{1-b}{1-a} + \frac{1-c}{1-b} = 3.$$

C. I. Ţ.

IV. 706. Se dă un cerc (O), cu raza R şi centrul O; apoi un diametru AB şi un punct C pe prelungirea razei OA, astfel ca $\overline{OC} = \overline{AB}$. Fie D şi D' punctele de contact ale tangentelor duse din C la cercul (O).

Se roteşte întreaga figură în jurul axei AB; punctul D descrie un cerc tras pe sfera (S) înnăscută de cercul (O). Să se calculeze:

a) Suprafaţa totală şi volumul conului având vârful în C şi ca bază cercul (D).

b) Suprafaţa calotei sferice cuprinsă în interiorul conului de mai sus limitat la bază.

c) Suprafaţa totală şi volumul conului având vârful în C, iar baza cercului determinat de generatoarele CD pe planul tangent în B la sfera (S).

Aplicaţie pentru R = 1.

O. N. Ţ.

Clasa a V-a. *Exerc. 830.* Să se descompună în factori expresia

$$E \equiv (abc + abd + acb + bcd)^2 - abcd\,(a + b + c + d)^2.$$

G. D. S.

V. 831. Să se rezolve sistemul

$$x + y = 3\,(a + b) \quad ; \quad ax - by = a^2 - b^2.$$

N. M.

V. 832. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 3\alpha^2 x - 3\alpha y + z - \alpha^3 &= 0 \\ 3\beta^2 x - 3\beta y + z - \beta^3 &= 0 \\ 8\alpha^3 x - 6\alpha^2 y + t - 3\alpha^4 &= 0 \\ 8\beta^3 x - 6\beta^2 y + t - 3\beta^4 &= 0. \end{aligned}$$

N. M.

V. 833. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2\alpha x - y - \alpha^2 &= 0 \\ 4\alpha^3 x - t - 3\alpha^4 &= 0 \\ 3\alpha^2 x - z - 2\alpha^3 &= 0 \\ -4\beta^3 x + 6\beta^2 y - 4\beta z + t + \beta^4 &= 0. \end{aligned}$$

N. M.

V. 834. Să se rezolve ecuația

$$x^2 - p\,\frac{1 + e^2}{1 - e^2}\,x + \frac{p^2}{4} = 0.$$

N. M.

V. 835. Se ia un unghiu $XOY = \alpha$, iar pe latura OX un punct A. Se descrie un arc de cerc cu centrul în A astfel ca să taie dreapta OY în două puncte, B, C.

Fie B′, C′ proiecțiile punctelor B, C pe OX.

Să se determine valoarea unghiului α, astfel ca să avem:

$$\overline{BB'} = \overline{AC'} \quad \text{și} \quad \overline{CC'} = \overline{AB'}.$$

G. D. S.

V. 836. Se dau în plan cercurile (O_1) și (O_2). La (O_2) centrul nu este cunoscut. Se cere să se construiască *numai cu rigla* centrul lui (O_2).

GH. B.

V. 837. Fie $\overline{AA'}$ înălțimea din vârful A al triunghiului isoscel ABC, cu laturile AB și AC egale. Se proiectează A' în D pe AC și B în E pe A'D. Să se demonstreze, că cercul de diametru $\overline{DE}$ este tangent laturii AB.

GH. B.

V. 838. Se dă un trapez isoscel ABCD cu baza mare BC și baza mică AD. Se rotește triunghiul BCD în jurul vârfului C până când vârful D ajunge pe dreapta AC, în D' (între A și C). Fie B' poziția în care ajunge vârful B. Să se demonstreze că unghiul dreptelor AC și BB' este jumătate din unghiul BAC.

G. D. S.

V. 839. Fie CD coarda perpendiculară în punctul E pe diametrul fix AB al cercului (O). Tangenta în A la cercul de diametru $\overline{CD}$ atinge acest cerc în T. Fie F proiecția lui T pe AB. Se cere să se găsească locul geometric al *centrului de greutate* al triunghiului BCF, când E se mișcă între A și B.

GH. B.

Clasa a VI-a. *Exerc. 842.* Să se arate că între aria laterală S, volumul V, raza R și înălțimea I a unui con circular drept avem relația

$$9\left(\frac{1}{I^2}+\frac{1}{R^2}\right)=\left(\frac{S}{V}\right)^2.$$

N. M.

VI. 843. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o latură, o mediană și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 844. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând două înălțimi și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 845. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o înălțime, o bisectoare și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 846. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând două bisectoare și raza cercului circumscris.

M. G.

VI. 847. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o înălțime, o mediană și suprafața.

M. G.

VI. 848. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o înălțime, o bisectoare și suprafața.

M. G.

VI. 849. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o mediană, o bisectoare și suprafața.

M. G.

VI. 850. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o înălțime, raza cercului circumscris și suprafața.

M. G.

VI. 851. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o mediană, raza cercului circumscris și suprafața.

M. G.

VI. 852. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând o bisectoare, raza cercului circumscris și suprafața.

M. G.

VI. 853. Să se rezolve un triunghiu, cunoscând două laturi și raza cercului înscris.

M. G.

Clasa a VII-a. *Exerc. 787.* Să se reprezinte grafic funcţia

$$y = 1 + x + x^2 + \log(1 - x)$$

I. I. S.

VII. 788. Să se deriveze funcţia

$$y = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{2} + \frac{3\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10}.$$

N. M.

VII. 789. Să se deriveze funcţia

$$y = -\cos x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{6}{5}\cos^5 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x.$$

N. M.

VII. 790. Să se arate că

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 2\sqrt{x-1}}{x} = \arcsin \frac{2\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

N. M.

VII. 791. Să se arate că funcţiile

$$u = \operatorname{arctg} \frac{x - 1 - 2\sqrt{x-1}}{x + 1 - 2\sqrt{x-1}} \quad \text{şi} \quad v = \operatorname{arctg}(x - 2\sqrt{x-1})$$

diferă între ele prin o constantă şi să se determine acea constantă.

O. N. Ţ.

VII. 792. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \frac{\sin^2 x - \sin x}{\cos^2 x - \cos x}$$

şi să se reprezinte această variaţie.

O. N. Ţ.

VII. 793. Să se arate că funcţiile

$$v = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1} \quad \text{şi} \quad w = 2\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

diferă una de alta cu o constantă.

O. N. Ţ.

VII. 794. Să se verifice că

$$C_k^s\, C_{i+s}^{k-1} - C_{i+s}^{s-1}\, C_i^{k-s} = C_{i+s+1}^{s}\, C_i^{k-s-1}.$$

N. M.

VII. 795. Să se arate că

$$C_{i-2}^{k-1} - C_k^1\, C_{i-1}^{k-1} + C_k^2\, C_i^{k-1} = \frac{(i+1)!}{2(i-1)(k-3)!\,(i-k+1)!}.$$

N. M.

VII. 796. Să se arate că

$$C_{i-1}^{k-1} - k\, C_i^{k-1} = -\frac{(i+1)!}{i.(k-2)!\,(i-k+1)!}.$$

N. M.

VII. 797. Plecând dela identitatea

$$C_m^n = \frac{m}{m-n}\, C_{m-1}^n$$

să se găsească din nou formula combinărilor.

N. M.

VII. 798. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & ab & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b^3 & b^3 \\ 1 & a^3 & b^3 \\ 1 & a^3 & a^3 \end{vmatrix}.$$

N. M.

VII. 799. Să se arate, că funcţiile

$$u = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \quad \text{şi} \quad v = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x^4-1}$$

diferă una de alta printr'o constantă.

O. N. Ţ.

VII. 800. Să se studieze variaţia funcţiei

$$y = \mathrm{L}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2+2}{x^2-2}.$$

O. N. Ţ.

Clasa a VIII-a. *Exerc. 692.* Să se spună câte rădăcini reale are ecuaţia

$$\sin x - x^2 = 0.$$

O. N. Ţ.

VIII. 693. λ fiind un parametru, să se discute natura rădăcinilor ecuaţiei

$$x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 13x^2 + 8x + \lambda = 0.$$

O. N. Ţ.

VIII. 694. λ fiind un parametru, să se discute şi să se separe rădăcinile reale ale ecuaţiei:

$$x^7 + 8x^6 + 27x^5 + 50x^4 + 55x^3 + 36x^2 + 13x + \lambda = 0.$$

O. N. Ţ.

VIII. 695. Se dă o parabolă (P), având focarul F şi vârful A. Unim un punct M al parabolei cu focarul F, iar prin M ducem un segment MR paralel cu axa parabolei şi egal cu raza vectoară MF. Să se găsească locul punctului R, când M descrie parabola (P) şi să se deducă elementele necesare construirei acestui loc.

O. N. Ţ.

VIII. 696. O dreaptă (D) trece prin vârful O al unei parabole; fie M un punct arbitrar pe (D); paralela din M la axă taie parabola în P; perpendiculara din M pe axă taie pe OP în N. Să se arate, că, dacă M descrie dreapta (D), N descrie o paralelă la axa parabolei.

N. M.

VIII. 697. Se dă cercul $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$. Să se găsească un punct M pe OX, din care ducând tangentele la cerc să obţinem un segment de *şase* unităţi pe paralela $y = 6$ la OX, cuprins între tangente.

G. D. S.

VIII. 698. O dreaptă (D) este perpendiculară pe dreptele paralele (Δ) şi (Δ') şi le întâlneşte respectiv în A şi B. Pe (D) se ia un punct M variabil şi din M se duc laturile unui unghiu drept. Una taie pe (Δ) în P, cealaltă pe (Δ') în Q.

Se cere locul geometric al proiecţiei punctului M pe dreapta PQ, când unghiul drept se roteşte în jurul lui M, iar punctul M descrie dreapta (D).

G. D. S.

VIII. 699. Să se afle locul geometric al punctelor, care au suma puterilor faţă de două cercuri egală cu suma puterilor faţă de alte două cercuri.

Generalizare pentru grupuri cu acelaşi număr de cercuri sau cu număr diferit de cercuri.

Particularizare pentru problema dată, când unele cercuri sunt de rază nulă.

G. D. S.

VIII. 700. Se dă un cerc de rază r şi un diametru (D) al său. Să se afle locul punctului M astfel ca raportul dintre puterea punctului faţă de cerc şi patratul distanţei până la diametrul (D) să fie constant. Discuţie.

G. D. S.

VIII. 701. Faţă de sistemul de axe OX, OY perpendiculare, una pe alta, se iau punctele A $(a, 0)$ şi B $(0, b)$.

a) Să se determine punctul M aşezat pe dreapta $y = mx$, astfel ca unghiul AMB să fie drept.

b) Aceeaşi problemă, când punctul M se află pe dreapta $x + y - b = 0$.

G. D. S.

VIII. 702. Se dă dreapta $6x + 5y - 15 = 0$.

a) Să se scrie ecuaţiile dreptelor simetrice dreptei date faţă cu axele de coordonate.

b) Să se scrie ecuaţia dreptei simetrică cu dreapta dată faţă de origine.

c) Să se scrie ecuaţiile dreptelor simetrice cu dreapta dată faţă de bisectoarele unghiului axelor de coordonate.

G. D. S.

VIII. 703. Se dă ecuaţia unei drepte (Δ), ce trece prin origina axelor de coordonate, şi se cere să se deducă din ea ecuaţiile simetricelor axelor faţă de (Δ).

GH. B.

VIII. 704. Ştiind că $i = \sqrt{-1}$, se cere să se găsească rădăcina patrată a fracţiei

$$\frac{i}{1-i}.$$

GH. B.

VIII. 705. Se dă o parabolă (P) cu focarul F, vârful A şi un punct M pe ea. Fie N al patrulea vârf al paralelogramului MAFN. Să se găsească locul punctului N, când M se mişcă pe parabola dată.

O. N. Ţ.

VIII. 706. Pe o parabolă dată cu focarul F şi vârful A se ia un punct M. Să se găsească locul centrului de greutate G al triunghiului AFM, când M descrie parabola dată. Să se construiască puncte şi tangentele în aceste puncte ale locului aflat.

O. N. Ţ.

VIII. 707. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$e^x - x^2 - 1 = 0$$

şi să se separe rădăcinile incomensurabile.

O. N. Ţ.

Exerciţii Generale. *Exerc. 623.* Să se rezolve în numere întregi ecuaţia:

$$(x-5)\sqrt{3-2y} + (x+1)\sqrt{2y-1} = 0.$$

I. I. S.

E. G. 624. Dacă $p(i)$ reprezintă produsul divizorilor numărului i, atunci putem avea

$$p(a \cdot b) = [p(a)]^{\alpha} \cdot [p(b)]^{\beta}.$$

I. L.

E. G. 625. Dacă $a < b < c$ sunt trei numere prime consecutive, atunci avem

$$a + c \lessdot 2b.$$

I. L.

E. G. 626. Dacă $a < b < c$ sunt trei numere prime consecutive, atunci avem

$$ab \lessdot b^2.$$

I. L.

E. G. 627. Dacă $a < b < c < d$ sunt patru numere prime consecutive, atunci avem

$$a + d \lessdot b + c.$$

I. L.

E. G. 628. Să se arate că indicatorul produselor a mai multor numere prime este mai mare decât indicatorul produsului numerelor obținute sporind pe fiecare cu însuși numărul mai puțin 2.

I. L.

E. G. 629. Dacă $\underset{x \to y}{S}(N)$ reprezintă suma numerelor prime cu N din intervalul de numere dela x la y, atunci să se găsească condiția existenței egalității

$$\underset{10 \to 100}{S}(N) = \underset{9 \to 99}{S}(N).$$

I. L.

E. G. 630. Se zice că un număr este *alicotâr* subdublu, sau subtriplu, sau subquadruplu, etc. dacă se deduce dintr'o relație de forma

$$s(N) - N = i \,.\, N,$$

unde $s(N)$ este suma divizorilor lui N și $i = 2, 3, 4, \ldots$

In ce caz s'ar putea obține un subtriplu, dintr'un subdublu prin o simplă înmulțire cu un alt număr?

I. L.

E. G. 631. Orice număr întreg și pozitiv poate să fie pus sub una din formele: $(p_1 + p_2)$ dacă este par și $(p_1 + p_2 \pm 1)$ dacă este impar, p_1 și p_2 fiind numere prime.

I. L.

E. G. 632. Un patrat pus în urma consecutivului său dă un patrat de patru cifre. Care este acest patrat?

O. N. Ț.

E. G. 633. Să se găsească două numere, unul răsturnatul celuilalt, astfel că şi patratele lor să fie unul răsturnatul celuilalt.

O. N. Ţ.

E. G. 634. Să se demonstreze că nu este nici un număr întreg cu cifre identice care să fie patrat perfect.

O. N. Ţ.

E. G. 635. Să se demonstreze că nu este nici un număr impar cu cifre identice, care să fie patrat perfect.

O. N. Ţ.

E. G. 636. Să se găsească patratele de patru cifre, care au toate cifrele de aceeaşi paritate.

O. N. Ţ.

E. G. 637. Să se arate că patratele numerelor N şi $N+5.10^p$ se termină cu aceleaşi $(p+1)$ cifre.

O. N. Ţ.

E. G. 638. Să se găsească un patrat de patru cifre, ale cărui cifre sunt toate terminaţii de patrate perfecte.

O. N. Ţ.

E. G. 639. Patratul unui număr de două cifre se obţine răsturnând numărul şi punând după fiecare cifră cifra 9.

Care este acel număr?

O. N. Ţ.

E. G. 640. Un patrat de patru cifre îl despărţim cu o linie în două părţi. Ştiind că partea din dreapta liniei întrece dublul părţii din stânga cu o unitate, să se găsească care este acel patrat.

O. N. Ţ.

E. G. 641. Un patrat de patru cifre îl despărţim cu o linie în două părţi. Ştiind că suma acelor două părţi este egală cu rădăcina patrată a acelui număr, să se găsească acel număr.

O. N. Ţ.

E. G. 642. Patratul unui număr de două cifre se formează astfel: între cifrele patratului unităţilor se pune patratul cifrei zecilor.

Care este acel număr.

O. N. Ţ.

Pentru redactarea şi trimiterea soluţiunilor exerciţiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii* se vor avea în vedere *Instrucţiunile* publicate în numerele 1, 2, 3 şi 4 pe copertă.

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII şi VIII, cu bogată activitate la această revistă îşi pot lărgi cadrul activităţii rezolvând şi probleme din „Gazeta Matematică".

În Biblioteca Societăţii „Gazeta Matematică" au apărut şi se găsesc următoarele:

III. **N. Abramescu,** *Algebra superioară pentru clasa VIII-a ştiinţifică,* Ediţia VIII-a . . . . . Lei 350

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** Vocabular Matematic . . . . . Lei 50

X. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie . . Lei 450

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. Istoric, învăţăminte. Volum jubilar (500 pag.) . . . . . { pentru particulari . . . Lei 500 / pentru abonaţii G. M. şi S. G. M. Lei 300

XII. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I. (Goniometrie) revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . Lei 330

XIII. **I. Ionescu,** Culegere de Probleme de Aritmetică. Partea I. Aritmetica raţionată . . . . . Lei 500

XIV. **V. Cristescu,** Culegere de Probleme de Trigonometrie. Partea I-a. (Trigonometrie plană). Ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 280

XV. **A. G. Ioachimescu,** Culegere de Probleme de Algebră. Partea I. Ediţia IV-a revăzută şi mărită . . . . . Lei 350

XVI. **G. Ţiţeica,** Culegere de Probleme de Geometrie Analitică. Partea I. Ediţia II-a, adăogită de *N. G. Botea* . . . Lei 400

XVIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Mecanică.* Ediţia II-a revăzută şi adăogită de **Gabriela Ţiţeica** . . . . . Lei 350

XIX. **V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Trigonometrie.* Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută şi adăogită de G-ralul **Gh. I. Liteanu.** Lei 190

XX. **I. I. Chiţulescu,** *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă.* Partea I . . . . . Lei 300

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de *V. Marian* . . . . . Lei 300

II. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile VII—IX de Aritmetică şi Cartea X a Iraţionalelor), tradusă din limba greacă de **V. Marian** Lei 350

III. *Elementele lui* **Euclid.** (Cărţile XI—XIII de Geometrie în spaţiu: Cartea XIV a lui HYPSICLE şi Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de **V. Marian** . . . . . Lei 250

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. **Ion Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II-a). . . . Lei 250

Biblioteca Matematică „GEORGE ŢIŢEICA"

I. **Ion Ionescu,** *Maxime şi minime geometrice* . . . . . Lei 200

„Gazeta Matematică" apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 600 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Abonamentele şi toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Societăţii „GAZETA MATEMATICĂ"

Casa Gazeta Matematică. — Calea Griviţei No. 158. — Bucureşti 2.

(Telefon: 7-3803).

M. O., IMPRIMERIA NAŢIONALĂ — C. 24.819